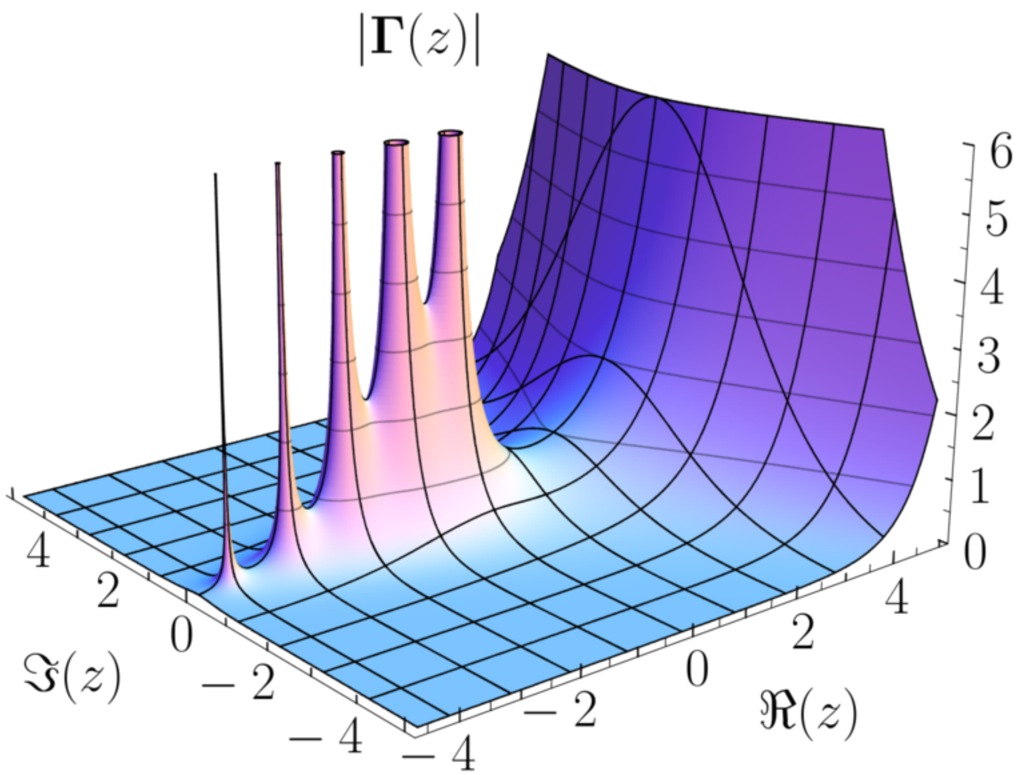
Función Gamma

Volumen 1

Problemas y Ejercicios para Olimpiadas de Matemática



Sociedad RAMAMCEM

Costa Rica, 2011

Resumen

La primera edición de la Revista Olímpica se publicó en el año 2006. En aquel entonces, el fuente fue escrito completamente en formato Word, usando las herramientas de edición matemática disponibles, y editando las imágenes externamente para luego insertarlas al archivo. Una vez listo todo se convertía a formato PDF logrando un resultado bastante satisfactorio.

Esta segunda versión, que ha adoptado el nombre "Función Gamma", lo que pretende es reescribir todo el contenido original en lenguaje LaTeX, para mejorar la presentación y tener una manera fácil y rápida de hacer correcciones, cambios o mejoras.

Hay algunas modificaciones significativas de formato entre la primera y la segunda versión. Se ha cambiado la organización del documento, colocando el Trasfondo Teórico como una sección separada, previa a la presentación de los problemas. Anteriormente se presentaba el Enunciado de los problemas propuestos y luego la Solución a los mismos como dos capítulos separados. En esta edición se omitió el capítulo de Enunciados. La sección anteriormente llamada Selección de Problemas ahora corresponde a Problemas Propuestos.

El equipo de edición original para la primera versión estuvo compuesto por los siguientes miembros:

- Miguel Arias Vílchez
- Kendrik Mitchel Maturin
- Jorge Obando Toruño
- José Virgilio Reyes Pérez
- Mauricio Rodríguez Mata

A ellos se les debe el arduo trabajo de recopilar toda la información, proponer soluciones y revisar que los fuentes estuvieran libres de errores, promocionar la publicación y enviarla vía correo electrónico a los interesados.

La migración a LaTeX fue realizada por Simón R. Sánchez.

La imagen de la portada se encuentra bajo la licencia Creative Commons Genérica de Atribución / Compartir-Igual 3.0.

Presentación

En los últimos años, las Olimpiadas de Matemática en Costa Rica han experimentado un aumento en su nivel de dificultad. Basta con comparar los problemas de cualquier eliminatoria con su par del año anterior. Si a lo anterior agregamos los grandes vacíos en los temarios oficiales de secundaria en muchos tópicos que son de suma importancia en estas pruebas, la conclusión a la que se llega es que un alumno destacado en Matemática de tercer ciclo o educación diversificada tiene poco que hacer en estas justas sin una adecuada preparación complementaria.

Por otro lado, la tendencia de los planes de estudios en los últimos años va orientada a sustituir los problemas que miden en el alumnado su capacidad creativa, imaginativa y deductiva por una repetición sosa para adquirir rutinas o moldes de resolución. Esta tendencia empaña toda la práctica de la enseñanza de la Matemática en nuestros colegios, desde la publicación de libros de textos hasta los tipos de exámenes con ejercicios o problemas cada vez más predecibles.

Las actitudes anteriores se ven aumentadas por la sensibilidad al llamado fracaso escolar que justifica cualquier acción cosmética encaminada a que el máximo número de alumnos alcance el nivel mínimo.

A Dios gracias, en este panorama también existe en nuestra sociedad un porcentaje de alumnos (pequeño, por cierto) que tienen ese “gusto” por la Matemática. Ellos no se preguntan ¿para qué sirve esto?, el reto de resolver un problema es suficiente motivación para estudiar Matemática y la satisfacción la obtienen al ver coronado su esfuerzo sin necesidad de esperar por esto unos puntos en su calificación.

El objetivo de esta publicación es proveer el material teórico-práctico necesario que estimule la participación en las Olimpiadas Costarricenses de Matemática de modo que todos los actores en estas justas tengan las mismas oportunidades de éxito. Además, y de forma más ambiciosa, se pretende potenciar el nivel de Matemática en nuestro país.

Esta publicación es realizada por la Sociedad RAMAMSEM y va dirigida a todas aquellas personas que deseen explorar una matemática diferente a la que se enseña en secundaria, ¡y algo más!

Toda comunicación o información con respecto a los problemas propuestos o soluciones, pueden ser enviados a ramamsem@costarricense.cr o bien a info@funciongamma.com.

Sugerencias, correcciones o comentarios serán bien recibidos.

Para más información, pueden visitar el sitio web http://www.funciongamma.com/.

Trasfondo Teórico

Sobre la función Gamma

En matemática, la función Gamma (denotada como $\Gamma(z)$) es una función que extiende el concepto de factorial a los números complejos. La notación fue ideada por Adrien-Marie Legendre.

Si la parte real del número complejo z es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

converge absolutamente. Esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo excepto a los enteros negativos y al cero.

Si n es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

lo que nos muestra la relación de esta función con el factorial. De hecho, la función Gamma generaliza el factorial para cualquier valor complejo de n.

La función Gamma aparece en varias funciones de distribución de probabilidad, por lo que es bastante usada tanto en probabilidad y estadística como en combinatoria.

Hemos elegido el nombre de esta interesante función para esta nueva versión de la Revista Olímpica y para el sitio web. En números posteriores estaremos estudiando algunas de sus propiedades, definiciones alternativas, y relación con otras funciones.

Congruencias

Dados dos números a y b, y un entero positivo n, definimos $a \equiv b \pmod{n}$ (léase "a congruente con b módulo n") si n divide a la diferencia $a - b$. Por ejemplo: $7 \equiv 1 \pmod{6}$ ya que 6 divide a $7 - 1$; $0 \equiv 32 \pmod{4}$ ya que 4 divide a $0 - 32$; además, $21 \not\equiv 10 \pmod{5}$ ya que 5 no divide a $21 - 10$.

Propiedades de las Congruencias

- Si $a \equiv 0 \pmod{n}$, entonces a es múltiplo de n.
- Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces a y b poseen el mismo residuo al dividir cada uno de ellos por n.
- Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$.

- Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $(a+c) \equiv (b+c) \pmod{n}$ y $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a/c \equiv b/c \pmod{n}$ si y sólo si el máximo común divisor entre c y n es 1.
- Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $ak \equiv bk \pmod{n}$ para k un entero positivo.
- Si p es un número primo y $ab \equiv 0 \pmod{p}$, entonces $a \equiv 0 \pmod{p}$ ó $b \equiv 0 \pmod{p}$.

Criterios de Divisibilidad

Se ofrece la demostración de 4 de estos criterios, y se deja al lector como ejercicio probar los otros 7.

- Por 2: un número entero es divisible por 2 cuando el dígito de sus unidades es un número par.
- Por 3: un número entero es divisible por 3 cuando la suma de sus dígitos es divisible por 3.
- Por 4: un número entero es divisible por 4 cuando el número formado por los últimos dos dígitos del número entero es divisible por 4.

  Prueba: Todo número expresado en base diez tiene la forma $N = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + 10^4a_4 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^na_n$.

  Ahora bien, nótese que a partir del tercer término (10^2a_2) todos los demás son divisibles por 4 por lo que si el número N es divisible por 4 lo debe ser también el número a_0+10a_1 que es precisamente el número de dos dígitos formado por los dos últimos dígitos del número N. Lo que permite concluir que el número N es divisible por 4 si y sólo si el número formado por sus dos últimos dígitos lo es.
- Por 5: un número entero es divisible por 5 cuando el dígito de sus unidades es 5 ó 0.

  Prueba: Nuevamente haciendo referencia a la expresión de un número en base diez, nótese que a partir del segundo término $(10a_1)$ todos los demás son divisibles por 5 por lo que si el número N es divisible por 5 lo debe ser también el número a_0 que es precisamente el último dígito del número N. Lo que permite concluir que el número N es divisible por 5 si y sólo si el último dígito es 0 ó 5.
- Por 6: un número entero es divisible por 6 cuando lo es, simultáneamente, por 2 y 3.
- Por 7: un número entero es divisible por 7 cuando la diferencia entre el número entero y el doble del número que resulta de eliminar el dígito de las unidades del número dado es divisible por 7. Si no es claro que el número obtenido sea divisible por 7 se puede seguir el procedimiento descrito anteriormente hasta obtener un número que, a simple vista, lo sea o no.

- Por 8: un número entero es divisible por 8 cuando el número formado por los últimos tres dígitos del número entero es divisible por 8.
- Por 9: un número entero es divisible por 9 cuando la suma de sus dígitos es divisible por 9.

  Prueba: Se debe tener presente que $10k$ es congruente con 1 módulo 9 ya sea k par o impar. Sean N el número a determinar si es divisible por 9, entonces:

  $$a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + \ldots + 10^na_n \equiv a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \pmod 9$$

  es decir, el número N es divisible por 9 si lo es la suma de sus dígitos.
- Por 10: un número entero es divisible por 10 cuando el dígito de sus unidades es 0.
- Por 11: un número entero es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan la posición par y los dígitos que ocupan la posición impar es divisible por 11. Si no es claro que el número obtenido sea divisible por 11 se puede seguir el procedimiento descrito anteriormente hasta obtener un número que, a simple vista, lo sea o no.

  Prueba: Se debe tener presente que $10k$ es congruente con 1 ó -1 módulo 11, de acuerdo a si k es par o impar. Sean N, a y b, respectivamente, el número a determinar si es divisible por 11, la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar, entonces

  $$a_0 + 10^2a_2 + 10^4a_4 + \ldots + 10^na_n \equiv a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_n = a \pmod{11}$$

  $$10a_1 + 10^3a_3 + 10^5a_5 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} \equiv -a_1 - a_2 - a_4 - \ldots - a_{n-1} = -b \pmod{11}$$

  Sumando estas congruencias tenemos:

  $$N \equiv (a - b) \pmod 1 1$$

  Por lo tanto, 11 divide a N si y sólo si 11 divide a $(a - b)$.
- Por 12: un número entero es divisible por 12 cuando lo es, simultáneamente, por 4 y 3.

Teorema 1 (“Desigualdad de Bernoulli”). *Si $x \geq -1$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces*

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

En cambio, si $\alpha < 0$ o bien si $\alpha > 1$, se tiene

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$$

El signo de igualdad en ambos casos se cumple sólo para $x = 0$.

Teorema 2 ("Identidad polinomial")**.** *En términos generales, la identidad polinomial podemos enunciarla así:*

Sean los polinomios

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Si estos polinomios son idénticos, entonces:

$$a_n = b_n$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}$$

$$a_{n-2} = b_{n-2}$$

$$\ldots$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_0 = b_0$$

Teorema 3 ("Fórmulas de Viêta")**.** *Sean el polinomio* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ *y* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ *sus ceros entonces:*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n$$

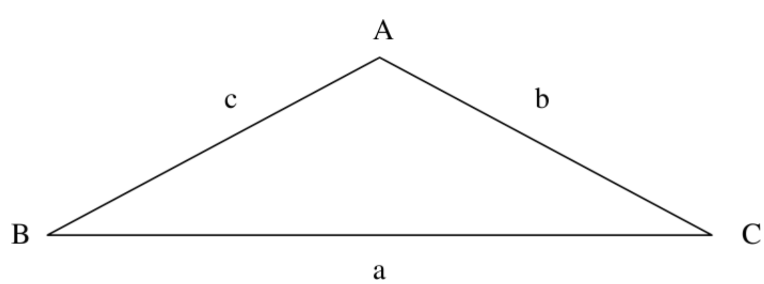
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-2}/a_n$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_0/a_n$$

Teorema 4 ("Ley de Cosenos")**.** *Dado el triángulo* ΔABC *tal que* $BC = a$, $AB = c$ *y* $AC = b$ *tal como lo indica la siguiente figura:*

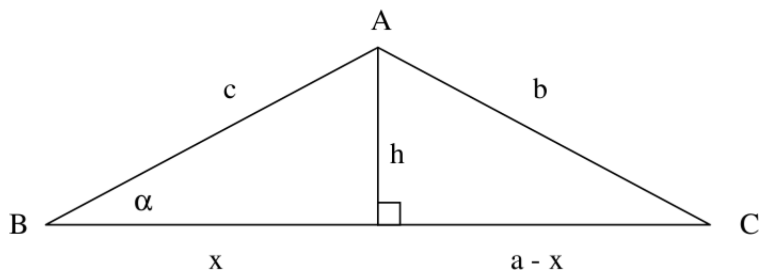


entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle BAC$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle ABC$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ACB$$

esto es, el cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados disminuidos en el doble producto de dichas longitudes y el coseno del ángulo formado por ellos.

Para demostrar este teorema consideremos la altura sobre BC en el interior del triángulo y con la notación de la figura siguiente:



$$h^2 + (a-x)^2 = b^2 \tag{1}$$
$$h^2 + x^2 = c^2 \tag{2}$$
$$\cos\alpha = x/c \tag{3}$$

Restando (2) de (1) se obtiene

$$(a-x)^2 - x^2 = b^2 - c^2$$
$$\Rightarrow a^2 - 2ax = b^2 - c^2$$
$$\Rightarrow a^2 + c^2 - 2ax = b^2 \tag{4}$$

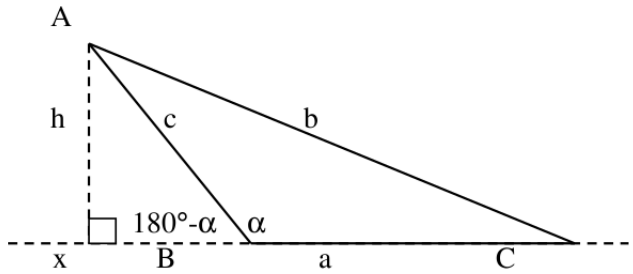
De (3) se tiene que $x = c\cos\alpha$ y sustituyendo en (4) se concluye que

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha = b^2$$

En forma análoga se demuestran las otras dos relaciones.

Todo lo anterior es cierto si la altura está en el interior del triángulo, pero ¿qué sucede si está en el exterior? Veamos.

Consideremos, ahora, la siguiente figura:



Entonces

$$h^2 + x^2 = c^2 \tag{5}$$

$$h^2 + (a-x)^2 = b^2 \tag{6}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = x/c \tag{7}$$

Restando (5) de (6) se obtiene

$$(a-x)^2 - x^2 = b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ax = b^2 - c^2$$

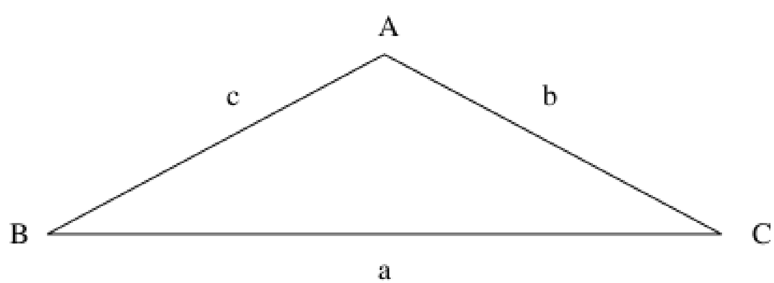
$$\Rightarrow a^2 + c^2 - 2ax = b^2 \tag{8}$$

De (7) se tiene que $x = c\cos(180^\circ - \alpha)$ pero como $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ (puede comprobarlo como ejercicio...) entonces $x = -\cos\alpha$. Y sustituyendo en (8) se concluye que

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha = b^2$$

como se quería demostrar.

Teorema 5 ("Ley de Senos")**.** *Dado el triángulo* ΔABC *tal que* $BC = a$, $AB = c$ *y* $AC = b$ *tal como lo indica la siguiente figura:*

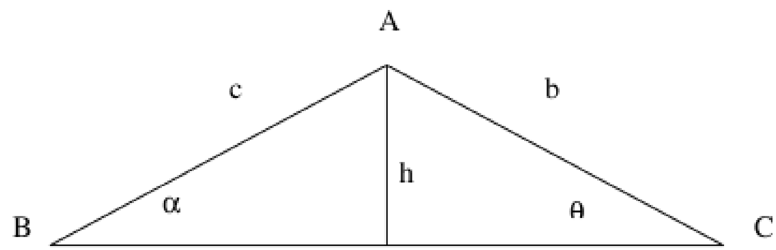


entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\angle BAC} = \frac{b}{\operatorname{sen}\angle ABC} = \frac{c}{\operatorname{sen}\angle ACB}$$

esto es, la razón entre la longitud de un lado y el seno del ángulo opuesto es constante.

Para demostrar este teorema consideremos la altura sobre BC en el interior del triángulo y con la notación de la figura siguiente:



Entonces

$$\operatorname{sen}\beta = h/c \Rightarrow c\operatorname{sen}\beta = h \tag{9}$$

$$\operatorname{sen}\theta = h/b \Rightarrow b\operatorname{sen}\theta = h \tag{10}$$

Igualando (9) y (10) se obtiene

$$b\operatorname{sen}\theta = c\operatorname{sen}\beta$$

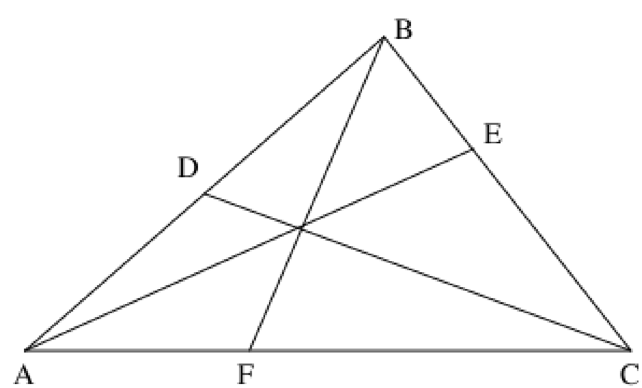
de donde se concluye que

$$b/\operatorname{sen}\beta = c/\operatorname{sen}\theta$$

De forma similar se demuestran las otras relaciones. Si la altura fuese exterior se procede análogamente teniendo presente que $\operatorname{sen}(180° - x) = \operatorname{sen} x$.

Teorema 6 ("Teorema de Ceva")**.** *Supongamos que en el triángulo ΔABC, en los lados AB, BC y AC se han tomado los puntos D, E y F respectivamente. Los segmentos AE, BF y CD son concurrentes si y sólo si*

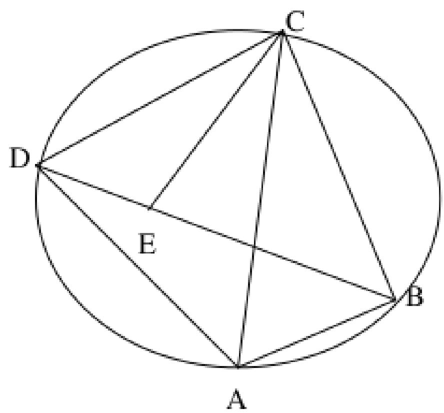
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$



Nótese que el orden en que se nombran los segmentos es en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Teorema 7 ("Teorema de Ptolomeo"). *En todo cuadrángulo concíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*

Para la demostración de este teorema consideremos la figura siguiente:



Tracemos el segmento CE de modo que $\angle DCA = \angle ECB$, como $\angle DAC = \angle DBC$ se sigue que $\Delta CDA \sim \Delta CEB$ con lo que $BC/AC = BE/AD$, entonces $AC \cdot BE = BC \cdot AD$. Análogamente, es claro que $\angle DCE = \angle ACB$ con lo que los $\Delta CDA \sim \Delta CEB$ por lo que $AC \cdot DE = AB \cdot DC$.

Sumando las dos ecuaciones encontradas obtenemos:

$$AC \cdot BE + AC \cdot DE = BC \cdot AD + AB \cdot DC$$

$$\Rightarrow AC(BE + DE) = BC \cdot AD + AB \cdot DC$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot DC$$

NOTA: Un cuadrángulo (cuadrilátero) concíclico es aquel que puede inscribirse en un círculo. Las dos condiciones siguientes son necesarias y suficientes (cada una por separado) para que un cuadrilátero sea concíclico.

a) $\angle ABD = \angle ACD$ ó $\angle BCA = \angle BDA$ ó $\angle CAB = \angle CDB$ ó $\angle BDC = \angle DAC$.

b) Que sus ángulos opuestos sean suplementarios.

Problemas Resueltos

Problema 1. Si $\tan x + \tan y = 25$ y $\cot x + \cot y = 30$. ¿Cuál es el valor numérico de $\tan(x+y)$?

Solución:

Como $\tan x + \tan y = 25$, entonces, de $\cot x + \cot y = 30$ se tiene

$$\Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{\tan x \tan y} = 30$$

de donde

$$\tan x \tan y = \frac{5}{6}$$

Luego,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow \tan(x+y) = \frac{25}{1-\frac{5}{6}} = 150$$

Problema 2. $G(x)$ es un polinomio de segundo grado tal que

$$G\left(x+\frac{1}{2}\right) - G\left(x-\frac{1}{2}\right) = 4(2x-1)\,\forall x \in \mathbb{R}$$

encuentre el valor mínimo de $G(x)$ si $G(0) = 5$.

Solución:

Sea $G(x) = ax^2 + bx + c$, como $G(0) = 5$ entonces $c = 5$ de donde $G(x) = ax^2 + bx + 5$.

Por otro lado, siendo $G\left(x+\frac{1}{2}\right) - G\left(x-\frac{1}{2}\right) = 8x - 4$ entonces:

$$\left[a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(x+\frac{1}{2}\right) + 5\right] - \left[a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(x-\frac{1}{2}\right) + 5\right] = 8x - 4$$

de donde, al efectuar las operaciones indicadas y reducir al máximo, se obtiene $2ax+b = 8x-4$ con lo que, al aplicar identidad polinomial, se tiene $a = 4$, $b = -4$ entonces $G(x) = 4x^2-4x+5$ y el mínimo valor de $G(x)$ nos lo da la coordenada "y" de su vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ el cual es 4.

Problema 3. a, b, c son las longitudes del ancho, largo y alto de un paralelepípedo cuyo volumen es numéricamente igual a su área total. Además a, b, c, son enteros tales que $a < b < c$.

Determine todas las tripletas (a, b, c) que satisfacen estas condiciones.

Solución:

Tenemos, del enunciado, $2\,(ab+bc+ac)=abc$. Si $a\leq 2$, el miembro izquierdo excede al derecho y no había igualdad. Si $a\geq 6$ (este es el otro acotamiento necesario) es fácil verificar que tampoco existe igualdad al ser el miembro izquierdo en cualquier caso menor que $6bc$ (realmente puede ser igual a $6bc$ pero en tal caso $a=6, b=4, c=12$ lo que contradice a la hipótesis $a<b<c$), de donde $a=3,4\ 5$.

- Para $a=3, c=\frac{6b}{b-6}=6+\frac{36}{b-6}$ y para $b=7,8,9$ y 10 se tiene $c=42,24,18$ y 15 respectivamente; para $b=11, c$ no es un entero. Para $b\geq 12, c\leq 12$, lo que contradice $c>b$.
- Para $a=4, c=\frac{4b}{b-4}=4+\frac{16}{b-4}$ y para $b=5,6$ se tiene $c=20,12$ respectivamente; para $b=7, c$ no es un entero. Para $b\geq 8, c\leq 8$, lo que contradice $c>b$.
- Para $a=5, c=\frac{10b}{3b-10}=\frac{10}{3}+\frac{100}{3(3b-10)}$ y para $b=6$ se tiene c no es un entero. Para $b\geq 7, c\leq 7$, lo que contradice $c>b$.

Por todo lo anterior todas las tripletas buscadas son $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$, $(4,5,20)$ y $(4,6,12)$.

Problema 4. Sean a y b números reales tales que $a+b=2$. Demuestre que $a^4+b^4\geq 2$.

Solución 1:

Notemos que si uno de los números a y b es negativo entonces la desigualdad es casi evidente. Por ejemplo, sea $b<0$, en este caso $a>2$ y $a^4>16$.

Por lo tanto, consideremos en lo próximo que $a\geq 0$ y $b\geq 0$. Sean $a=1+c$ y $b=1-c$; ya que suponemos que $a\geq 0$ y $b\geq 0$ se deduce que $-1\leq c\leq 1$. Entonces, por la *Desigualdad de Bernoulli*, $(1+c)^4\geq 1+4c$ y $(1-c)^4\geq 1-4c$.

De tal modo se tiene $a^4+b^4=(1+c)^4+(1-c)^4\geq(1+4c)+(1-4c)=2$.

Solución 2:

Como $a+b=2$ entonces, por ejemplo, $b=2-a$. Consideremos $f(a,b)=a^4+b^4$ esto es $f'(a)=a^4+(2-a)^4$ con lo que $f'(a)=4a^3-4(2-a)^3$ que al factorizar se transforma en $f'(a)=8(a-1)[(a-1)^2+3]$.

Es notorio que esta primera derivada se hace cero en el único caso de que $a=1$. Al ser $f'(a)<0$ para $a<1$ y $f'(a)>0$ para $a>1$ se deduce que $f(a)$ alcanza un valor mínimo con $a=1$. Por tanto $f(a,b)=a^4+b^4\geq 2$.

Problema 5. Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x + 9p = 0$ posee una única raíz real para todo valor del parámetro real p.

Solución 1:

Supongamos que a, b y c son las raíces de la ecuación dada, éstas, de acuerdo con las Fórmulas de Viêta satisfacen las relaciones

$$ab + ac + bc = 6 \tag{11}$$

$$a + b + c = 3 \tag{12}$$

Elevando (12) al cuadrado se obtiene $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 9$ que equivale a $a^2 + b^2 + c^2 + 12 = 9$, es decir $a^2 + b^2 + c^2 = -3$ lo cual no es posible si todas las raíces fueran reales. Como la ecuación es de grado tres y las raíces complejas de una ecuación aparecen en ella conjugadas se concluye que la ecuación dada posee una única raíz real.

NOTA: Si a, b y c son las raíces de una ecuación cúbica de la forma $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, por el *Teorema del Factor* se tiene que:

$$x^3 + mx^2 + nx + p = (x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + mx^2 + nx + p = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$$

y, aplicando identidad polinomial se obtiene:

$$a + b + c = -m$$

$$ab + ac + bc = n$$

$$abc = -p$$

Solución 2:

Sea $x = y + 1$, entonces la ecuación dada equivale a

$$(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 + 6(y + 1) + 9p = 0$$

al efectuar los cálculos indicados y reducir al máximo se obtiene

$$y^3 + 3y + 4 + 9p = 0$$

El discriminante de esta ecuación está dado por $D = \frac{(4+9p)^2}{4} + 1$ y al ser mayor que cero para todo valor real de p se concluye que la ecuación original posee una única raíz real y dos complejas.

NOTA: en esta solución se hace uso del hecho de que toda ecuación cúbica de la forma $x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$ se puede reducir a la ecuación equivalente $y3 + qy + r = 0$ mediante la sustitución $x = y - \frac{p_1}{3}$ y que el discriminante, de la ecuación resultante, $D = \frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ satisface

- Si $D > 0$ la ecuación posee dos raíces en $\mathbb{C}$ y una en $\mathbb{R}$.
- Si $D = 0$ la ecuación posee tres raíces reales, dos de ellas iguales.
- Si $D < 0$ la ecuación posee tres raíces reales distintas.

Solución 3:

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 9p$, con $p \in \mathbb{R}$. Como $f(x)$ es un polinomio de grado tres se tiene que posee al menos una solución real.

Luego, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, esto es, $f(x)$ es creciente $\forall x \in \mathbb{R}$ por lo que, al intersecar al eje X no podrá volverlo a intersecar. Por lo anterior, se demuestra que la ecuación dada posee una única raíz real $\forall p \in \mathbb{R}$.

Problema 6. N es un número cuadrado perfecto de cuatro dígitos cada uno de ellos menores que 7. Aumentando cada dígito en tres unidades se obtiene otro cuadrado perfecto. Determine N.

Solución:

Sea $N = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ (que es la forma desarrollada de un número escrito en base diez) en donde a, b, c y d son números enteros tales que $1 \leq a \leq 6$, y $0 \leq b, c, d \leq 6$. Por hipótesis $N = n^2$ para algún entero positivo n. De donde $n^2 = N \leq 6666$ así $n \leq 81$.

También, por hipótesis,

$$(a+3) \cdot 10^3 + (b+3) \cdot 10^2 + (c+3) \cdot 10 + (d+3) = m^2$$

para algún entero positivo m. Entonces $m^2 - n^2 = 3333$, haciendo $(m+n)(m-n) = 3 \cdot 11 \cdot 101$. Porque $m + n > m - n$ y $n \leq 81$ se tiene que $m + n = 101$ y $m - n = 33$ así $n = 34$ y se concluye que $N = 1156$.

Problema 7. Sean a, b, c los lados y α, β, θ los ángulos opuestos a dichos lados, respectivamente, de un triángulo.

Pruebe que si

$$ab^2 cos\alpha = bc^2 cos\beta = ca^2 cos\theta$$

entonces el triángulo es equilátero.

Solución:

De la igualdad $ab^2 cos\alpha = bc^2 cos\beta$ y la Ley de Cosenos, obtenemos

$$ab^2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = bc^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

simplificando al máximo se tiene

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 = a^4 + c^4 \tag{13}$$

similarmente, obtendremos

$$b^2 c^2 + a^2 c^2 = a^4 + b^4 \tag{14}$$

y,

$$a^2 b^2 + a^2 c^2 = b^4 + c^4 \tag{15}$$

sumando (13), (14) y (15) tenemos

$$\begin{aligned} 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 &= 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 \\ \Rightarrow \left(a^2 - b^2\right)^2 + \left(b^2 - c^2\right)^2 + \left(c^2 - a^2\right)^2 &= 0 \\ \Rightarrow a = b = c \end{aligned}$$

de lo anterior, se concluye que el triángulo es equilátero.

Problema 8. Determine la suma de todos los divisores d de $N = 19^{88} - 1$ los cuales son de la forma $d = 2^a \cdot 3^b$ con $a, b > 0$.

Solución:

Notemos que $N = 19^{88} - 1 = (19^{11} - 1)(19^{11} + 1)(19^{22} + 1)(19^{44} + 1)$.

Buscamos enteros m, n tales que $2^m \cdot 3^n \mid (19^{11} - 1)$, donde m, n sean los mayores posibles. Es claro, de la factorización de N, que $n = 2$ ya que $19 \equiv 1 (mod 9)$ lo que implica $19k \equiv 1 (mod 9)$ de donde, el factor $(19^{11} - 1)$ es divisible por 9 pero no por 27 (esto se puede comprobar fácilmente), de manera similar se comprueba que los factores $(19^{11}+1)$, $(19^{22}+1)$ y $(19^{44}+1)$ no son divisibles por 3. Del mismo modo, tenemos que $m = 5$ ya que $(19^{11} - 1)$ es divisible por 4 pero no por 8 y, los otros factores $(19^{11} + 1)$, $(19^{22} + 1)$ y $(19^{44} + 1)$ son divisibles por 2 pero no por ninguna otra potencia de dos. De todo lo anterior, la suma a determinar es:

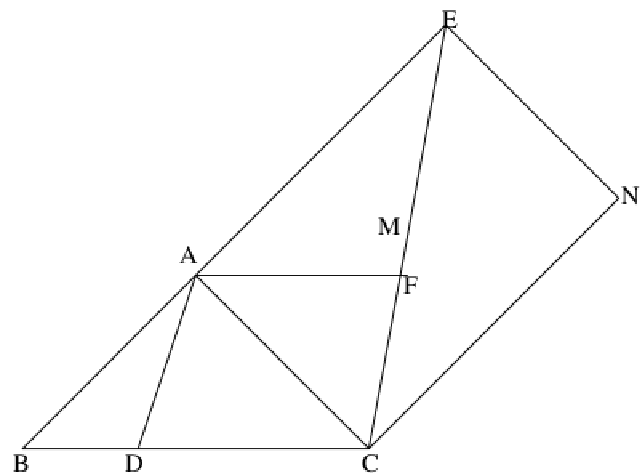
$$\begin{aligned} (2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 \cdot 3 + 2^5 \cdot 3) + (2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 3^2 + 2^5 \cdot 3^2) \\ = (3 + 9)(2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 744 \end{aligned}$$

NOTA: la expresión $a \mid b$ se lee “a divide a b” y, por otro lado, para comprobar que el factor $(19^{11} - 1)$ era divisible por 9 pero no por 27 se utilizó “congruencias modulares”.

Problema 9. ABC es un triángulo isósceles en donde $AB = AC$ y $\angle A < 90°$. Sea D un punto arbitrario del segmento BC. Trace CE paralela a AD que interseque a la prolongación de $\overrightarrow{BA}$ en E. Pruebe que $CE > 2CD$.

Solución 1:

Trace AF paralela a BC tal que $AF = CD$. Trace $AM = MN$ donde M es el punto medio de CE.



Entonces, $AENC$ es un paralelogramo. Como $\angle A < 90°$ el $\angle EAC$ es un ángulo obtuso y entonces $CE > AN = 2AM$. Como $AM \geq AF$ (ya que una mediana es mayor o igual que la bisectriz trazadas ambos de un mismo vértice), entonces $CE > 2AM \geq 2AF = 2CD$.

Solución 2:

El triángulo CEB es semejante al triángulo DAB, así:

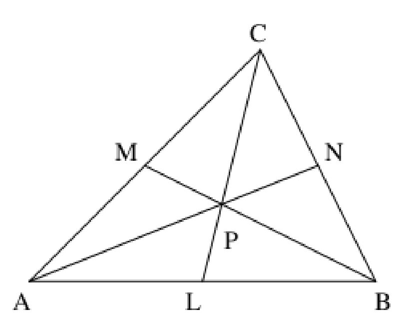
$$CE = \frac{BC \cdot DA}{BD}$$

Como $BC = CD + BD$ se tiene que $\frac{CE}{CD} = \frac{BC \cdot DA}{CD \cdot BD} \geq \frac{BC \cdot DA}{\frac{BC^2}{4}} = \frac{4DA}{BC} \geq \frac{4}{BC} \cdot \frac{BC}{2} \cdot \tan \angle ABC > 2$ (ya que $\angle ABC > 45°$).

Problema 10. L y M son puntos en los lados AB y AC, respectivamente, del triángulo ABC tales que $AL = \frac{2AB}{5}$ y $AM = \frac{3AC}{4}$. Si BM y CL se intersecan en P, y AP y BC se intersecan en N, determine $\frac{BN}{NC}$.

Solución:

Consideremos la siguiente figura:



Del *Teorema de Ceva* se tiene:

$$\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CM}{MA}=1 \tag{16}$$

Dado que $LB = AB - AL = \frac{3AB}{5}$ y $CM = AC - AM = \frac{AC}{4}$ despejando en (16) se obtiene que $\frac{BN}{NC} = \frac{9}{2}$ por lo que $\frac{BN}{BC} = \frac{9}{11}$.

Problema 11. Determine todos los enteros positivos n tales que P_n es divisible por 5, donde $P_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n$.

Solución 1:

Trabajando con congruencia módulo 5, $P_n \equiv 1 + 2^n + (-2)^n + (-1)^n$. Si n es impar, $P_n \equiv 1 + 2^n - 2^n - 1^n$ y así $5 \mid P_n$. Si $n = 2(2k+1)$, $2^n \equiv 42k + 1 \equiv -1$. Así, $P_n \equiv 1 + 2^n + 2^n + 1 \equiv 1 - 1 - 1 + 1 \equiv 0$, y $5 \mid P_n$. Finalmente, supongamos que $n = 4m$, entonces $2^n \equiv (2^4)^m \equiv (1)^m \equiv 1$ y $P_n \equiv 1+1+1+1 \equiv 4 \not\equiv 0$. Así, P_n es divisible por 5 solamente en el caso de que n sea impar o el doble de un número impar.

Solución 2:

$P_n \equiv 1 + 2^n + (5-2)^n + (5-1)^n$. Si n es impar, por el binomio de Newton, se tiene que $P_n \equiv 1 + 2^n + 5k + (-2)^n + 5m + (-1)^n \equiv 1 + 2^n + 5k - 2^n + 5m - 1^n \equiv 0$. Si n es par, $n = 2a$ entonces $P_{2a} = 1 + 2^{2a} + 5k + 2^{2a} + 5m + 1$ con lo que $P_{2a} = 2(1 + 2^{2a}) + 5(k+m)$. Ahora bien, $1 + 2^{2a} = 1 + (5-1)^a$ es divisible por 5 si a es impar. En resumen, n debe ser impar o el doble de un número impar.

Problema 12. Halle todas las tripletas de enteros positivos que satisfagan la ecuación

$$5(xy + yz + xz) = 4xyz$$

Solución:

La ecuación dada puede ser expresada como:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5} \tag{17}$$

Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $1 \le x \le y \le z$. Desde que x, y, z son positivos es claramente imposible que $x = 1$. Por otro lado, si $x \ge 4$, entonces $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < \frac{3}{4}$ por lo que la ecuación (17) sólo puede tener soluciones enteras positivas si $x = 2$ ó $x = 3$.

Cuando $x = 3$, (17) se transforma en $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{7}{15}$. Si $y \ge 5$ entonces $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{5}$. Así, $y = 3$ ó $y = 4$. En cualquier caso se puede comprobar fácilmente que z no es entero.

Cuando $x = 2$, (17) se transforma en $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{3}{10}$. Si $y \le 3$ entonces $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{3}$. Si $y \ge 7$ entonces $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{2}{7}$. Así, $y = 4$, 5 ó 6. Para $y = 4$ se tiene $z = 20$ y la solución $(2, 4, 20)$. Para

$y = 5$, se tiene $z = 10$ y la solución $(2, 5, 10)$. Para $y = 6$ se tiene $z = \frac{15}{2}$ el cual no satisface las condiciones del enunciado.

Resumiendo, la ecuación tiene 12 soluciones que se obtienen de permutar las tripletas $(2, 4, 20)$ y $(2, 5, 10)$ debido a la simetría del la ecuación con respecto a las variables x, y, z.

Problema 13. Todos los números de dos dígitos desde 19 hasta 80 son escritos en una sola fila. El resultado es leído como el número 1920212223 . . . 77787980. Pruebe que dicho número es divisible por 1980.

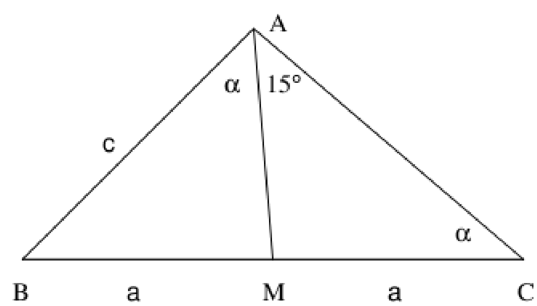
Solución:

Como $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, necesitamos probar que el número formado es divisible por 4, 9, 5 y 11. Los dos últimos dígitos son 8 y 0, así que el número es divisible por 4 y 5. La suma de los dígitos en posición impar es $1 + (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)10 + 8 = 279$ y la suma de los dígitos que están en la posición par es $9 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)6 + 0 = 279$. Como $279 + 279 = 558$ el número dado es divisible por 9 y como $279 - 279 = 0$ el número también es divisible por 11. Se concluye, de todo lo anterior, que el número dado es divisible por 1980.

Problema 14. Sea M el punto medio del lado BC del triángulo ABC, suponga que $\angle BAM = \angle BCA$ y $\angle MAC = 15°$. Halle la medida de $\angle BCA$.

Solución:

Consideremos la siguiente figura:



Sean $\alpha = \angle BCA$, $c = AB$ y $a = BM = MC$. Como el triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔMBA, $\frac{c}{2a} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = a\sqrt{2}$.

Aplicando el *Teorema de los Senos* al ΔABC tenemos:

$$\frac{2a}{\operatorname{sen}(\alpha + 15°)} = \frac{a\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 15°)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$

Como $\alpha < 90°$ (justificar esto último queda como ejercicio) se sigue que:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + 15°)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(30° + 15°)}{\operatorname{sen} 15°}$$

por lo que se concluye que $\alpha = 30°$.

Problema 15. Pruebe que el sistema de ecuaciones $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^3 + y^3 = 3$ no tiene solución.

Solución:

De $x + y = 1$ se obtiene $(x + y)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$. Sustituyendo este resultado en $x^2+y^2 = 2$ obtenemos $1-2xy = 2 \Rightarrow xy = \frac{-1}{2}$. Si $x^3+y^3 = 3$ entonces $(x+y)(x^2-xy+y^2) = 3 \Rightarrow 1\left(2 + \frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow \frac{5}{2} = 3$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, el sistema dado no tiene solución.

Problema 16. Simplifique al máximo la expresión

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots\left(99^3-1\right)\left(100^3-1\right)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots\left(99^3+1\right)\left(100^3+1\right)}$$

Solución:

Factorizando la expresión dada es equivalente a

$$\frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1)\cdots(99-1)\left(99^2+99+1\right)(100-1)\left(100^2+100+1\right)}{(2+1)(2^2+2-1)(3+1)(3^2-3+1)\cdots(99+1)\left(99^2-99+1\right)(100+1)\left(100^2-100+1\right)}$$

como $((n+2)-1) = n+1$ y $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$, cancelando se tiene

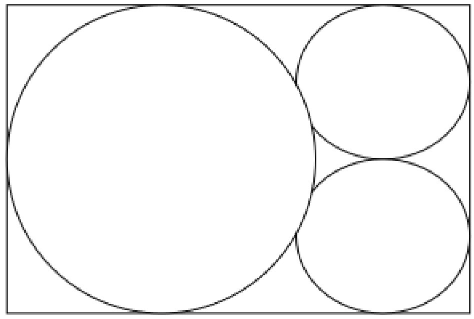
$$\frac{(2-1)(3-1)\left(100^2+100+1\right)}{(2^2-2+1)(99+1)(100+1)} = \frac{10101}{15150} = \frac{3367}{5050}$$

Problema 17. En el triángulo ABC la altura desde A hasta BC interseca a BC en D, y la altura desde B a AC interseca a AD en H. Si $AD = 4$, $BD = 3$ y $CD = 2$, determine la longitud de HD.

Solución:

Es claro que $\Delta CAD \sim \Delta ABD$ así que $\frac{HD}{BD} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{2}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

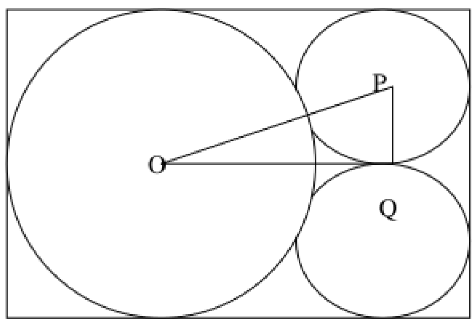
Problema 18. Un rectángulo contiene tres círculos como muestra la figura (los dos círculos menores son congruentes), todos ellos tangentes al rectángulo y a cada uno de los otros.



Si el ancho del rectángulo mide 4, determine el largo del rectángulo.

Solución:

Consideremos la siguiente figura.



Sea O el centro del círculo mayor y P el centro de uno de los círculos menores y Q el punto de tangencia de los círculos menores. Entonces $\angle PQO = 90°$, $PQ = 1$ y $OP = 1 + 2 = 3$. Por el *Teorema de Pitágoras* $OQ = 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, el largo del rectángulo mide $3 + 2\sqrt{2}$.

Problema 19. Sean a, b, c números racionales. Una de las raíces de $ax^3 + bx + c = 0$ es igual al producto de las otras dos. Prueba que esta raíz es racional.

Solución:

Sean r_1, r_2 y r_3 las raíces de la ecuación cúbica dada tales que $r_1 = r_2 r_3$. De las Fórmulas de Viêta se tiene que

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \tag{18}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 + r_2 r_3 = r_1(r_2 + r_3) + r_1 = \frac{b}{a} \tag{19}$$

$$r_1 r_2 r_3 = {r_1}^2 = -\frac{c}{a} \tag{20}$$

De (18) se obtiene $r_2 + r_3 = -r_1$ y sustituyendo este resultado en (19) obtenemos

$$-{r_1}^2 + r_1 = \frac{b}{a} \Rightarrow r_1 = \frac{b}{a} + {r_1}^2 \tag{21}$$

Finalmente, sustituyendo (20) en (21) se obtiene $r_1 = \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}$ el cual es racional.

Problema 20. Un número capicúa es aquel que se lee igual de adelante hacia atrás como de atrás hacia delante. Por ejemplo, 1991 es un número capicúa. ¿Cuántos números capicúas hay entre 1 y 99999 incluidos éstos?

Solución:

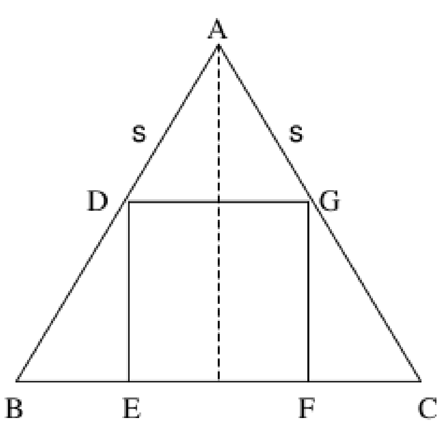
Vamos a encontrar la cantidad n_k de números n de k dígitos que sean capicúas. Si $k = 1$, entonces $n \in \{1, 2, 3, \ldots 9\}$ (nótese que también 0 es un número capicúa pero, de acuerdo con el enunciado, debe excluirse en este problema) y $n_1 = 9$. Si $k > 1$ es impar, $k = 2l + 1$, $l \geq 1$ entonces $n_k = 9 \cdot 10l$ (justificar el por qué como ejercicio) y si k es par, $k = 2l$, $l \geq 1$ entonces $n_k = 9 \cdot 10l - 1$ (nuevamente, justificar el por qué queda como ejercicio). De lo anterior, tenemos que la respuesta es

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098$$

Problema 21. Un cuadrado está inscrito en un triángulo equilátero. Determine la razón del área del cuadrado al área del triángulo.

Solución:

Sean ABC el triángulo equilátero y $DEFG$ el cuadrado tal como lo muestra la siguiente figura.



Ahora, $\angle ADG = \angle ABC = \angle AGD = \angle ACB = 60°$, así ΔADG es un triángulo equilátero con lado de longitud s que también es la longitud del lado del cuadrado. Si hacemos coincidir al segmento DE con el segmento GF se formará un triángulo equilátero con longitud s. Ahora bien, el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ y el área de un triángulo equilátero de altura h es $\frac{\sqrt{3}}{3}h^2$ de donde el arreadle triángulo ABC es $(ADG)+(BDE)+(DEFG)+(GFC)$ es decir,

$$(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}s^2 + s^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}+12}{12}\right)s^2$$

por lo que la razón buscada es

$$\frac{(DEFG)}{(ABC)} = \frac{s^2}{\left(\frac{7\sqrt{3}+12}{12}\right)s^2} = \frac{12}{7\sqrt{3}+12} = 28\sqrt{3} - 48$$

Problema 22. Si α, β, γ son las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$, determine el valor numérico de

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

Solución:

De las fórmulas de Viêta se tiene que $\alpha+\beta+\gamma = 0$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = -1$, $\alpha\beta\gamma = 1$. Entonces $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{N}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} = S$ en donde el numerador, simplificado, corresponde a:

$$N = 3 - (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma = 3 - 0 + 1 + 3 = 7$$

por otro lado, como α, β, γ son las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$ entonces

$$x^3 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

haciendo $x = 1$ se tiene $-1 = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$. Finalmente, $S = -7$.

Problema 23. Halle el valor de $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{98}{99!} + \frac{99}{100!}$.

Solución:

Nótese que $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)k!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)k!} = \frac{k}{(k+1)!}$.

Así,

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$
$$\frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$
$$\frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

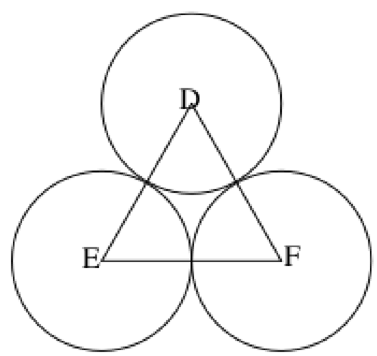
$$\begin{aligned} &\cdots \\ \frac{98}{99!} &= \frac{1}{98!} - \frac{1}{99!} \\ \frac{99}{100!} &= \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} \end{aligned}$$

Sumando, miembro a miembro, las igualdades se tiene que $S = 1 - \frac{1}{100!}$.

Problema 24. Tres círculos congruentes de radio r son tangentes dos a dos. Determine el área cóncava entre los tres círculos.

Solución:

Sean D, E y F los centros de los círculos como lo indica la figura siguiente:



Entonces el ΔDEF es equilátero cuyo lado mide $2r$ y su área es $r^2\sqrt{3}$. El área cóncava entre los tres círculos es igual al área del triángulo DEF menos los tres sectores circulares, los cuales subtienden arcos de $60°$ en un círculo de radio r. Así el área buscada es

$$r^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} r^2 \pi = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot r^2$$

Problema 25. Determine la función $f(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $f(x)$ es una función cuadrática.

b) $f(x+2) = f(x) + x + 2$.

c) $f(2) = 2$.

Solución:

De (a) se tiene que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como $f(x+2) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$ entonces $a(x+2)2 + b(x+2) + c = ax^2 + bx + c + x + 2$.

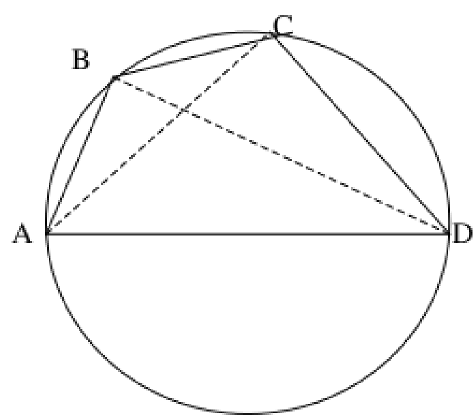
Al desarrollar y reducir términos semejantes se obtiene $4ax + 4a + 2b = x + 2$. Aplicando identidad polinomial se tiene el sistema de ecuaciones $4a = 1$, $4a + 2b = 2$ que al resolver nos brinda las soluciones $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{2}$.

De (c) se tiene $f(2) = 4a + 2b + c = 2$ lo que implica que $c + 2 = 2$, esto es, $c = 0$ por tanto, $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$.

Problema 26. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en un círculo cuyo diámetro AD tiene longitud 4. Si los lados AB y BC tienen longitud 1 determine, entonces, la longitud del lado CD.

Solución 1:

Consideremos la siguiente figura:



Sea $CD = x$, luego entonces por el *Teorema de Pitágoras* se tiene

$$BD^2 + AB^2 = AD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{15}$$
$$AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow AC = \sqrt{16 - x^2}$$

Aplicando el *Teorema de Ptolomeo* al cuadrilátero $ABCD$ se tiene

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$
$$\Rightarrow 1 \cdot x + 4 \cdot 1 = \sqrt{16 - x^2} \cdot \sqrt{15}$$

resolviendo la ecuación anterior, se tiene $x = \frac{7}{2}$ y $x = -4$ por lo que $CD = \frac{7}{2}$.

Solución 2:

Como $AB = 1 = BC$ entonces los arcos que subtienden esas cuerdas son congruentes. Entonces $\angle ADB = \angle BDC$ por subtender dichos arcos.

Ahora bien, $\operatorname{sen}\angle ADB = \frac{1}{4}$ y $\cos\angle ADC = \frac{CD}{4}$. Como $\angle ADC = 2\angle ADB$, sustituyendo se tiene que:

$$\cos 2\angle ADB = 1 - 2\operatorname{sen}^2\angle ADB = \frac{CD}{4}$$

Esto es:

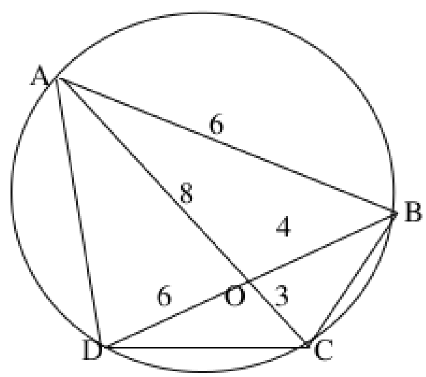
$$CD = 4\left[1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{7}{2}$$

Problema 27. En el cuadrilátero $ABCD$ con diagonales AC y BD que se intersecan en O, $BO = 4$, $OD = 6$, $AO = 8$, $OC = 3$ y $AB = 6$. Determine la longitud de AD.

Solución 1:

Es conocido que si los segmentos AC y BD se intersecan en un punto O tal que $AO \cdot OC = BO \cdot OD$, entonces los puntos A, B, C, D están sobre un círculo.

Consideremos la figura siguiente:



No es difícil probar que los pares de triángulos AOB, DOC y BOC, AOD son triángulos semejantes. En nuestro caso, para el primer par de triángulos dados se tiene $\frac{CD}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow CD = \frac{9}{2}$; para el segundo par se tiene $\frac{AD}{BC} = \frac{8}{4} \Rightarrow BC = \frac{AD}{2}$.

Aplicando el *Teorema de Ptolomeo* obtenemos $AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD \Rightarrow AD \cdot \frac{AD}{2} + 6 \cdot \frac{9}{2} = 11 \cdot 10$ de donde, al efectuar las operaciones indicadas y resolver la ecuación, se obtiene $AD = \sqrt{166}$.

Solución 2:

Consideremos la figura utilizada en la solución anterior, aplicando el *Teorema de los Cosenos* al ΔAOB se tiene $6^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos\angle AOB$ con lo que $\cos\angle AOB = \frac{11}{16}$.

Recordemos, además, que $\cos(180° - x) = -\cos x$ con lo que $\cos\angle AOD = cos(180° - \angle AOB) = -\cos\angle AOB = -\frac{11}{16}$.

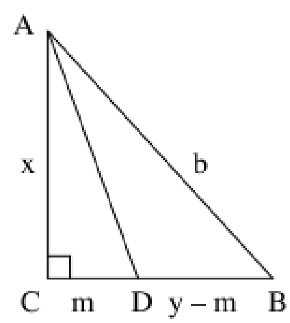
Aplicando, finalmente, el *Teorema de los Cosenos* al triángulo ΔAOD se obtiene:

$$AD^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cos\angle AOD = 166 \Rightarrow AD = \sqrt{166}$$

Problema 28. En el triángulo rectángulo ABC, rectángulo en C, se traza la bisectriz AD con $D \in BC$. Si la longitud de la hipotenusa es 6 y la longitud de bisectriz es $2\sqrt{3}$, determine la longitud de los catetos.

Solución 1:

Consideremos la figura siguiente:



Por el *Teorema de Pitágoras* se tiene:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow 12 = x^2 + m^2 \tag{22}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 36 = x^2 + y^2 \tag{23}$$

Por el *Teorema de la Bisectriz* se tiene:

$$\frac{m}{y-m} = \frac{x}{6} \tag{24}$$

De (22) se tiene

$$y - m = \frac{6m}{x} \tag{25}$$

Restando (23) de (22) obtenemos

$$y^2 - m^2 = 24 \Rightarrow (y+m)(y-m) = 24 \Rightarrow y + m = \frac{4x}{m} \tag{26}$$

Resolviendo el sistema formado por (25) y (26) para m se tiene

$$m = \frac{2x^2 - 3m^2}{xm} \Rightarrow xm^2 = 2x^2 - 3z^2 \Rightarrow m^2 = \frac{2x^2}{x+3}$$

y sustituyendo este resultado en (23) se tiene:

$$x^2 + \frac{2x^2}{x+3} = 12$$

cuyas soluciones son $x = 3$, $x = -6$ y $x = -2$ con lo que se obtiene $x = AC = 3$, $y = BC = 3\sqrt{3}$.

Solución 2:

Consideremos la figura de la solución anterior, sea $\angle CAD = \alpha$ y $\angle CAB = 2\alpha$, entonces $\cos\alpha = \frac{x}{2\sqrt{3}}$, $\cos 2\alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow 2\cos 2\alpha - 1 = \frac{x}{6}$. Sustituyendo $\cos\alpha$ y resolviendo la ecuación hallamos $x = 3$ y por el *Teorema de Pitágoras* $y = 3\sqrt{3}$.

Problema 29. En el triángulo ABC, $\angle A = 5\pi/8$, $\angle B = \pi/8$ y $\angle C = \pi/4$. Pruebe que su bisectriz CZ, la mediana BE y la altura AD son concurrentes.

Solución:

Sean a, b, c las longitudes de los lados en el orden usual. Por el *Teorema de Ceva*, tenemos que probar:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

Ahora,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c \cdot \cos\frac{\pi}{8}}{b \cdot \cos\frac{\pi}{4}}$$
$$\frac{CE}{EA} = 1$$
$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{b}{a}$$

También, por la *Ley de Senos*:

$$\frac{c}{sen\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{sen\frac{5\pi}{8}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{sen\frac{\pi}{4}}{sen\frac{5\pi}{8}}$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} = \cos\frac{-\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$$

Entonces:
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{c}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{sen\frac{\pi}{4}}{sen\frac{5\pi}{8}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{sen\frac{5\pi}{8}}=1$$

Problema 30. Pruebe que $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{3}}$ es un número racional y simplifique la expresión anterior para obtener el racional que representa.

Solución 1:

Sean $a=\sqrt{5}+2$ y $b=\sqrt{5}-2$ entonces:

$$a-b=4 \tag{27}$$

$$ab=1 \tag{28}$$

Por otro lado, $a-b=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$ que es equivalente a la expresión

$$a-b=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left[\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right]$$

sustituyendo (27) y (28) se obtiene $4=\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^3+3\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)$, reordenando la ecuación y haciendo el cambio de variable $u=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ se tiene la ecuación $u^3+3u-4=0$ cuya única solución real es $u=1$.

De todo lo anterior, se ha probado que el número dado es igual a 1 y, por tanto, racional.

Solución 2:

Sea $k=\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{3}}$, entonces $k^3=\left[\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3$ de donde

$$k^3=\left(\sqrt{5}+2\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)-3\left[\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)\right]\cdot\left[\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$\Rightarrow k^3=4-3k$$
$$\Rightarrow k^3+3k-4=0$$
$$\Rightarrow (k-1)(k^2+k+4)=0$$

esta última ecuación posee la única solución real y racional $k=1$.

Problemas Propuestos

La solución oficial de estos 10 problemas será publicada en la próxima edición trimestral. Esperamos también contar con algunas soluciones brindadas por nuestros lectores para su publicación.

1. Determine el valor de la suma $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 100 \cdot 2^{99}$.

2. Determine si los siguientes números son iguales o cuál es el mayor de ellos.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} \text{ y } B = \sqrt[3]{\tfrac{1}{9}} - \sqrt[3]{\tfrac{2}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{4}{9}}.$$

3. Al concluir el primer torneo inter-especies de fútbol, en el cual cada equipo jugó una sola vez contra los otros dos, las estadísticas más relevantes del torneo escritas por los Zecrofianos y los Valudianos son, respectivamente,

	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles en Contra	Goles a Favor	Puntos
Zecrofia	c	b	b	cc	ffh	d
Tierra	b	b	c	fbe	ff	b
Valudia	f	b	f	ah	db	c

	Ganados	Empatados	Perdidos	Goles en Contra	Goles a Favor	Puntos
Zecrofia	p	x	p	pxq	ppr	r
Tierra	r	x	x	mm	mxr	q
Valudia	x	x	r	rqp	pq	x

Cada una de estas hojas de estadísticas es equivalente a la otra y son correctas. Cada una, sin embargo, está escrita en el sistema de numeración de cada especie. La base de cada sistema es menor que 10 pero mayor que 1. Los Zecrofianos y Valudianos usan las mismas operaciones de suma, resta, división y multiplicación y las reglas de manipulación de éstas que se utilizan en la Tierra. Cada letra representa un dígito. Se asignan dos puntos por victoria y un punto por empate. Determine la hoja de estadística que presentara un humano.

4. Sea ABC un triángulo equilátero inscrito en un círculo de centro O, M es un punto sobre el arco BC tal que A y M están en lados opuestos del segmento BC. Demuestre que $AM = BM + MC$.

5. Pruebe que en cualquier triángulo acutángulo, la suma del circunradio y el inradio es menor que la longitud del lado de segunda mayor longitud.

6. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 = y^2 + 71$.

7. Suponga que α, β, γ son ángulos agudos tales que:

$$\frac{sen\,(\alpha-\beta)}{sen\,(\alpha+\beta)} + \frac{sen\,(\beta-\gamma)}{sen\,(\beta+\gamma)} + \frac{sen\,(\gamma-\alpha)}{sen\,(\gamma+\alpha)} = 0$$

Pruebe que al menos dos ángulos de ellos son iguales.

8. Hallar todas las soluciones enteras de

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$$

9. Dos números son tales que la suma de sus cubos es 5 y la suma de sus cuadrados es 3. Determine la suma de los dos números.

10. El producto de dos de las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ es -32. Determine el valor de k.