Taller de resolución
de problemas de concurso
Universidad de Puerto Rico
Colegio Universitario de Cayey

Dr. David A. SANTOS

Versión del January 3, 2010

Contents

Prefacio

Escribí estas notas en el verano del 1996, en un taller de resolución de problemas de concurso para maestros de secundaria en Puerto Rico.

El hacerlas accesibles en la red me ha hecho percatar cuán útiles han sido para estudiantes de habla castellana, ya que muchos lectores se han comunicado conmigo. Por eso decidido el revisarlas frecuentemente.

Quisiera pues pedir a los lectores el que me comunicasen errores que hallaren, etc.

Bastante del material que aquí aparece es traducción de material que he escrito en lengua gringa. De semana en semana, de mes en mes, iré añadiendo material y las respuestas de varios ejercicios. Todavía necesito añadir material en geometría, teoría de grafos, enumeración y análisis. Invito también a los lectores a contribuir material.

David A. SANTOS
dsantos@ccp.edu

Aviso Legal

La loi dans sa majestueuse égalité, interdit à tous, aux riches comme aux pauvres de dormir sous les ponts, de mendier dans la rue et de voler du pain. – Anatole France (Les Lys Rouge - 1894)

Chapter 1

Técnicas elementales

1.1 Contradicción

1 Ejemplo Sean x, y, z, w enteros satisfaciendo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=1.$$

Demuéstrese que al menos uno de ellos es par.

►**Resolución:** *Presúmase que todos x, y, z, w son nones. Luego*

$$yzw+xzw+xyw+xyz=xyzw.$$

El lado siniestro es par, por ser la suma de cuatro enteros nones. El lado diestro es non, siendo el producto de cuatro enteros nones. Esto resulta en una contradicción. ◄

2 Ejemplo El producto de 34 enteros es igual a 1. Demuéstrese que la suma de éstos no puede ser 0.

►**Resolución:** *Forzosamente los enteros deberán ser ± 1. Ya que el producto es 1, debe de haber un número par de -1's. Si la suma de estos enteros fuese 0, entonces debería haber tantos $+1$'s como -1's. Luego así habrán de haber diecisiete -1's y diecisiete $+1$'s, lo que conlleva a una contradicción.* ◄

3 Ejemplo Demuéstrese, sin recurrir a una calculatriz, que $6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$.

►**Resolución:** *Presúmase que $6-\sqrt{35}\geq\frac{1}{10}$. Entonces $6-\frac{1}{10}\geq\sqrt{35}$, o sea, $59\geq 10\sqrt{35}$. Al cuadrar uno y otro lado, $3481\geq 3500$, lo que no tiene sentido. Luego entonces se concluye que $6-\sqrt{35}<\frac{1}{10}$.* ◄

4 Ejemplo Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación arbitraria de los enteros $1, 2, \ldots, n$, donde n es non. Demuéstrese que el producto

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

es par.

►**Resolución:** *Obsérvese primero que la suma de un número impar de enteros impares impar es. Sólo tiene que demostrarse que al menos una de las diferencias a_k-k es par. Presúmase al contrario, que todas las diferencias a_k-k impares son. Es evidente que*

$$S=(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=0,$$

ya que las a_k's son un reordenamiento de $1,2,\ldots,n$. S es, por suposición, la suma de un número impar de enteros impares, resultando en el entero par 0. Esto es imposible, así que nuestra suposición inicial es falsa y por lo tanto al menos una de las diferencias $a_k - k$ es par, lo que por consiguiente, hace par al producto. ◄

5 Ejemplo Demuéstrese que $\sqrt{2}$ es irracional.

►**Resolución:** *Presúmase que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con enteros positivos a, b. Esto conlleva a $2b^2 = a^2$. Ahora bien, tanto a^2 como b^2 tienen un número par de primos en su factorización (contando repeticiones). Luego $2b^2$ tiene un número impar de primos en su factorización y a^2 tiene un número par de primos en su factorización. Esto contradice el hecho de que todo entero positivo mayor que 1 puede descomponerse en factores primos de forma única.* ◄

6 Ejemplo Demúestrese que 2003 no es la suma de dos cuadrados.

►**Resolución:** *Primero se demostrará que la suma de dos cuadrados nunca deja residuo 3 al ser dividida por 4. De esto se obtiene el resultado de inmediato. Cada entero es o bien par, (de la forma $2k$) o non (de la forma $2k+1$). Se tiene que*

$$\begin{aligned}(2k)^2 &= 4(k^2),\\ (2k+1)^2 &= 4(k^2+k)+1.\end{aligned}$$

Luego, el cuadrado de cada entero o bien deja residuo 0 o bien deja residuo 1 al ser dividido por 4. La suma de dos enteros entonces dejará residuo 0, 1, o 2 al ser dividida por 4. ◄

7 Ejemplo Si a, b, c son enteros impares, demuéstrese que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no posee una solución racional.

►**Resolución:** *Si la ecuación poseyere la solución racional $\frac{p}{q}$, con p, q relativamente primos, entonces*

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0 \implies ap^2 + bpq + cq^2 = 0.$$

Si ambos p y p fuesen nones, entonces $ap^2 + bpq + cq^2$ sería también non, y por lo tanto $\neq 0$. De manera semejante, si uno entre p y q fuese impar y el otro par, luego o bien $ap^2 + bpq$ o bien $bpq + cq^2$ sería par, y $ap^2 + bpq + cq^2$ impar, otra contradicción. Luego, tal raíz racional $d frac pq$ es ficticia. ◄

Tarea

8 Problema En $\triangle ABC$, $A > B$. Demuéstrese que $BC > AC$.

9 Problema Sea $0 < \alpha < 1$. Demuéstrese que $\sqrt{\alpha} > \alpha$.

10 Problema Sea $\alpha = 0.999\ldots$ en donde hay al menos 2000 nueves. Demuéstrese que la expansión decimal de $\sqrt{\alpha}$ también comienza con al menos 2000 nueves.

11 Problema Demostrar que no existen enteros a, b, c, d tales que

$$x^4 + 2x^2 + 2x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

1.2 Principio de las pichoneras de Dirichlet

12 Ejemplo Las nueve casillas de un cuadrado 3×3 son llenadas aleatoriamente por -1's, 0's, o 1's. Demuéstrese que entre las ocho sumas resultantes (tres columnas, tres filas y dos diagonales), hay al menos dos de ellas idénticas.

►**Resolución:** *Hay siete sumas posibles, cada una un entero del conjunto $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. Por el principio de las pichoneras, dos de las ocho sumas del cuadrado deberán de coincidir.* ◄

13 Ejemplo Cincuenta y un puntos se distribuyen sobre un cuadrado 1×1. Demuéstrese que hay al menos tres puntos que pueden ser cubiertos por un cuadrado $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$.

►**Resolución:** *Divídase al cuadrado en veinticinco subcuadrados* $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$, *cada uno de ellos con sus lados paralelos al cuadrado original. Uno de estos subcuadrados posee* $\llbracket \frac{51}{25} \rrbracket = 3$ *al menos.* ◄

14 Ejemplo (Putnam 1978) Sea A cualquier conjunto de veinte enteros escogidos de la progresión aritmética $1, 4, \ldots, 100$. Demuéstrese que hay al menos dos enteros diferentes en A cuya suma es 104.

►**Resolución:** *Agrúpese los treinticuatro enteros de esta progresión en los dicienueve grupos*

$$\{1\}, \{52\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \{10, 94\}, \ldots, \{49, 55\}.$$

Como se habrá de escoger veinte y se tiene diecienueve conjuntos, se habrá de tomar dos enteros, al menos, perteneciendo al mismo conjunto, y estos sumarán a 104*.* ◄

15 Ejemplo Demuéstrese que entre siete enteros positivos distintos ≤ 126, siempre se puede conseguir dos de ellos a y b satisfaciendo

$$b < a \leq 2b.$$

►**Resolución:** *Divídase el conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 126\}$ *en los seis subconjuntos*

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, \ldots, 13, 14\}, \{15, 16, \ldots, 29, 30\},$$

$$\{31, 32, \ldots, 61, 62\} \text{ y } \{63, 64, \ldots, 126\}.$$

Dos de los siete enteros yacerán en el mismo subconjunto y satisfacerán las desigualdades mencionadas. ◄

16 Ejemplo No importa cuales cincuenta y cinco enteros se seleccionen de

$$\{1, 2, \ldots, 100\},$$

demuéstrese que habrá dos de ellos cuya diferencia será 10.

►**Resolución:** *Obsérvese primero que si elegimos* $n+1$ *enteros de cualquiera ristra de* $2n$ *enteros consecutivos, entonces habrá dos cuya diferencia será* n*. Esto es patente al aparear los* $2n$ *enteros consecutivos*

$$\{a+1, a+2, a+3, \ldots, a+2n\}$$

en los n *pares*

$$\{a+1, a+n+1\}, \{a+2, a+n+2\}, \ldots, \{a+n, a+2n\}.$$

Agrúpese pues los cien enteros como sigue:

$$\{1, 2, \ldots 20\}, \{21, 22, \ldots, 40\},$$

$$\{41, 42, \ldots, 60\},\ \{61, 62, \ldots, 80\}$$

y

$$\{81, 82, \ldots, 100\}.$$

Si seleccionamos cincuenta y cinco enteros, entonces, forzozamente habremos de seleccionar once del mismo grupo. Del dicho grupo, por la observación anterior (con $n = 10$*), habrá dos cuya differencia será* 10*.* ◄

17 Ejemplo (AHSME 1994) Márquese a un disco con la etiqueta "**1**", a dos discos con la etiqueta "**2**", a tres discos con la etiqueta "**3**", $\ldots$, a cincuenta discos con la etiqueta "**50**". Póngase a estos $1+2+3+\cdots+50=1275$ discos en una caja. Se sacan luego discos de la caja, al azar y sin remplazo. ¿Cuál es el número mínimo de discos que se debe sacar para garantizar al menos diez discos con la misma etiqueta?

►**Resolución:** *Si se saca todos los $1+2+\cdots+9=45$ discos con etiquetas "**1**", $\ldots$, "**9**" y cualquiera nueve discos con etiquetas "**10**", $\ldots$, "**50**", se habrá sacado $45+9\cdot 41=414$ discos. El 415-avo disco sacado garantizará que haya al menos diez discos con la misma etiqueta.* ◄

18 Ejemplo Dado cualquier subconjunto A de diez enteros del conjunto $\{1,2,\ldots,98,99\}$ demuéstrese que siempre habrá dos subconjuntos disjuntos de A cuyos elementos tienen la misma suma.

►**Resolución:** *Hay $2^{10}-1=1023$ subconjuntos no nulos que se pueden formar con un conjunto de diez elementos. A cada uno de estos subconjuntos le asociamos su suma. La máxima suma que puede ser obtenible es $90+91+\cdots+99=945<1023$. Luego, hay dos subconjuntos, digamos S,T (no necesariamente disjuntos) cuya suma de elementos es idéntica. Luego, $S\setminus(S\cap T)$ y $T\setminus(S\cap T)$ también tienen suma idéntica de elementos.* ◄

19 Ejemplo Dados cualesquiera 9 enteros cuyos factores primos yagan en el conjunto $\{3,7,11\}$, demuéstrese que habrá dos cuyo producto es un cuadrado perfecto.

►**Resolución:** *Para que un entero sea un cuadrado, todos los exponentes de los primos de su factorización en primos deben ser pares. Todo entero cuyos factores yagan en el conjunto dado es de la forma $3^a7^b11^c$. Los tríos (a,b,c) yacen en exactamente uno de los 8 patrones de paridad (par, par, par), (par, par, non), (par, non, par), (par, non, non), (non, par, par), (non, par, non), (non, non, par), (non, non, non). En un grupo de nueve tales enteros, habrá pues dos cuyo patrón de paridad sea idéntico. Luego el producto de estos dos enteros es un cuadrado, ya que la suma de cada exponente será par.* ◄

Tarea

20 Problema Si se toman $n+1$ enteros del conjunto $\{1,2,\ldots,2n\}$, demuéstrese que siempre habrá dos que son relativamente primos.

21 Problema Si se toman $n+1$ enteros del conjunto $\{1,2,\ldots,2n\}$, demuéstrese que siempre habrá dos tales que el menor dividirá (sin dejar residuo) al mayor.

22 Problema Pruebe que entre $n+1$ enteros, siempre habrá dos cuya diferencia será divisible por n.

23 Problema (AHSME 1991) Una mesa circular tiene exactamente sesenta sillas en torno. Hay N personas ya sentadas de manera que la próxima persona a sentarse por fuerza se sentará al lado de alguien. ¿Cuál es el valor mínimo de N?

24 Problema Cinco puntos cualesquiera son colocados sobre un cuadrado de lado 1. Demuéstrese que dos de ellos están a una distancia de a lo sumo $\sqrt{2}/2$.

1.3 Paridad

25 Ejemplo Dos esquinas diametralmente opuestas son cortadas de un tablero de ajedrez, que como se recordará, tiene 64 casillas. Demuéstrese que es imposible recubrir totalmente a las 62 casillas restantes de 31 dominós.

►**Resolución:** *Cada dominó cubre cuadrados de diferente color. Al eliminar dos casillas diametralmente opuestas, se eliminan dos casillas del mismo color. Por lo tanto quedan 32 casillas de un color y 30 de otras y luego los 31 dominós no las pueden cubrir a todas.* ◄

26 Ejemplo Los 28 dominós de un juego se enfilan observando las reglas del dominó. Si al principio de la cadena se observa un 6 ¿qué entero se observará al final de la cadena?

►**Resolución:** *Se observará también a un* 6*. Cada número debe ocurrir un número par de veces de manera que se puedan enfilar. De los ocho* 6*'s: se tiene uno al principio de la cadena, seis de ellos se aparearán entre sí en medio de la cadena y finalmente, el restante quedará al final de la cadena.* ◄

27 Ejemplo Demuéstrese que para ninguna selección de signos en

$$1 \pm 2 \pm \cdots \pm 10,$$

se obtendrá una suma 0.

►**Resolución:** *La suma* $1+2+\cdots+10 = 55$*, un entero impar. Ya que la paridad no es afectada por la elección de signo, para cualquier selección de signo* $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 10$ *nunca será par, y en particular, nunca será* 0*.* ◄

28 Definición Llámase *punto reticular en el plano* al punto coordenado (m,n) en el plano cuyas coordenadas m y n son ambas enteras.

29 Definición El *punto medio del segmento* de recta que comienza en (x,y) y termina en (x_1,y_1) es el punto

$$\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2} \quad .$$

30 Ejemplo Se seleccionan cinco puntos reticulares en el plano, al azar. Demostrar que existe dos de entre ellos que forman un segmento de recta cuyo punto medio es también un punto reticular.

►**Resolución:** *Hay cuatro patrones de paridad posibles para cada punto reticular en el plano: (par, par), (par, non), (non, non), (non, par). Por el principio de las pichoneras, dos de los cinco puntos reticulares compartirán el mismo patrón de paridad, y luego, su punto medio será también reticular.*◄

Para los ejemplos siguientes necesitaremos algunas definiciones de tetrominós, las cuales se daremos en las figuras al calce.

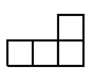


Figure 1.1: L-tetrominó

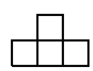


Figure 1.2: T-tetrominó

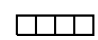


Figure 1.3: Tetrominó recto

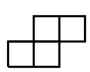


Figure 1.4: Tetrominó torcido

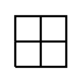


Figure 1.5: Tetrominó cuadrado

31 Ejemplo Se posee tan sólo una copia de los cinco tetrominós arriba mostrados, pudiendo así cubrir 20 cuadrados. Demuéstrese que es imposible arreglarlos de tal manera que se cubra a un rectángulo.

►**Resolución:** *Si tal rectángulo existiese, tendría* 20 *cuadrados. Coloreése el rectángulo a la manera de un tablero de ajedrez, con diez cuadrados rojos y diez negros. El T-tetrominó siempre cubre un número impar de cuadrados rojos y los otros siempre cubren un número par de cuadrados rojos. Así pues el número de cuadrados rojos cubiertos es impar, contradicción.*◄

32 Ejemplo Demuéstrese que un tablero de ajedrez (8×8) no se puede recubrir totalmente con 15 tetrominós rectos y un L-tetrominó.

►**Resolución:** *Coloreése las filas* $1,3,5,7$ *en blanco y las filas* $2,4,6$, 8 *en azul. Un tetrominó recto siempre cubrirá un número par de cuadrados blancos y un L-tetrominó siempre cubrirá un número impar de cuadrados blancos. Si el recubrimiento fuese posible entonces se cubrirá tan sólo un número impar de cuadrados blancos, contradicción.* ◄

Tarea

33 Problema Veinticinco niños y veinticinco niñas son sentados alrededor de una mesa circular. Demuéstrese que ambos vecinos de al menos una persona serán niñas.

34 Problema Se sueldan 2001 varillas (rectas) formando un camino. Demostrar que no existe ninguna línea recta—no pasando por un punto de soldadura del camino—que intersecte a todos los 2001 segmentos del camino.

35 Problema Se escribe los $1,2,\ldots,2001$ enteros en una pizarra. Se borran de dos en dos, remplazándolos con el valor absoluto de su diferencia. Demostrar que el último número obtenido nunca será 0.

36 Problema Demuéstrese que un tablero 10×10 nunca se podrá recubrir totalmente con 25 tetrominós rectos.

37 Problema Demuéstrese que un tablero 8×8 nunca se podrá recubrir totalmente con 15 T-tetrominós y un tetrominó cuadrado.

38 Problema Una urna tiene 900 boletas, numeradas del 100 al 999. Se sacan boletas al azar y sin remplazo, y se suman sus dígitos. ¿Cuál es el número menor de boletas que se necesitará sacar para garantizar que al menos tres de estas boletas tengan la misma suma de dígitos?

1.4 Inducción

El principio de inducción matemática resta en la siguiente observación intuitiva. Supongamos que tenemos que efectuar una tarea que requiere cierto número de pasos sucesivos. Supongamos que siempre lograremos completar el paso n si ya hemos completado el paso $n-1$. Así pues, si acaso pudiésemos comenzar (completando un paso base), entonces podríamos completar todos los pasos a partir del paso base.

Así pues, en el principio de inducción matemática, tratamos de comprobar la veracidad de una aserción $P(n)$ estableciendo primero su validez en un caso base k_0 (usualmente $k_0=1$). Luego tratamos de establecer si información sobre la validez de $P(n-1)$ conlleva a información favorable sobre $P(n)$.

39 Teorema (Principio de inducción matemática) Si un conjunto $\mathscr{S}$ de enteros positivos posee al 1, y también se verifica que el entero $n+1$ está toda vez que el entero n esté, entonces $\mathscr{S}=\mathbb{N}$.

40 Corolario Si el conjunto $\mathscr{A}$ de enteros positivos contiene al entero m y también contiene al entero $n+1$ siempre que contenga a n, donde $n>m$, entonces $\mathscr{A}$ es el conjunto de todos los enteros positivos mayores o iguales a m.

41 Corolario (Inducción robusta) Si el conjunto $\mathscr{A}$ de enteros positivos contiene al entero m y también contiene a $n+1$ siempre que contenga a $m+1,m+2,\ldots,n$, donde $n>m$, entonces $\mathscr{A}$ es el conjunto de todos los enteros positivos mayores o iguales a m.

42 Ejemplo Demostrar que $2^n>n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

►**Resolución:** *La aserción es cierta para* $n=0$, *ya que* $2^0>0$. *Presúmase que* $2^{n-1}>n-1$ *para* $n>1$. *Ahora bien,*

$$2^n=2(2^{n-1})>2(n-1)=2n-2=n+n-2.$$

Pero $n-1>0\implies n-2\geq 0$, *ya que* $n+n-2\geq n+0=n$ *y entonces,*

$$2^n>n.$$

Esto establece el resultado por inducción. ◄

43 Ejemplo Demostrar que todo cuadrado se puede descomponer en n subcuadrados, no necesariamente del mismo tamaño, para toda $n = 4, 6, 7, 8, \ldots$.

►**Resolución:** *Al dividir al cuadrado en cuatro, como en la figura 1.6, se incrementa el número de cuadrados por tres. Así pues, si n es asequible, también lo es $n+3$. Así pues, si se demuestra que $n = 6$, $n = 7$ y $n = 8$ son factibles, entonces se conseguirá toda descomposición en $n \geq 6$ cuadrados. Pero esto se deduce de las figuras 1.7 y 1.8 (para $n = 7$, se descompone uno de los subcuadrados de la figura 1.6), terminando la demostración.* ◄

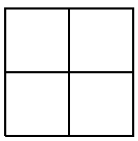


Figure 1.6: Ejemplo 43.

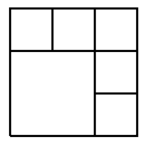


Figure 1.7: Ejemplo 43.

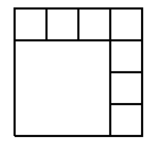


Figure 1.8: Ejemplo 43.

44 Ejemplo Demostrar que

$$3^{3n+3} - 26n - 27$$

es un múltiplo de 169 para todo número natural n.

►**Resolución:** *Sea $P(n)$ la aserción "$\exists T \in \mathbb{N}$ with $3^{3n+3} - 26n - 27 = 169T$." Demostrarase que $P(1)$ es cierta y que $P(n-1) \implies P(n)$. Para $n = 1$ se asevera que $3^6 - 53 = 676 = 169 \cdot 4$ es divisible por 169, lo cual es evidente.*

Ahora bien, $P(n-1)$ se traduce en la existencia de un $N \in \mathbb{N}$ tal que $3^{3(n-1)+3} - 26(n-1) - 27 = 169N$, i.e., para $n > 1$,

$$3^{3n} - 26n - 1 = 169N$$

para algún entero N. Luego

$$3^{3n+3} - 26n - 27 = 27 \cdot 3^{3n} - 26n - 27 = 27(3^{3n} - 26n - 1) + 676n$$

lo que simplifica a

$$27 \cdot 169N + 169 \cdot 4n,$$

que claramente múltiplo de 169 es. Esto establece el resultado mediante inducción. ◄

Tarea

45 Problema Demostrar que para todo entero $n \geq 1$, la cantidad

$$(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$$

es un entero par y que

$$(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2}$$

para algún entero b.

46 Problema Si k es impar, demostrar que 2^{n+2} divide a

$$k^{2^n} - 1$$

para todo natural n.

47 Problema Si se toman $n+1$ enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, demuéstrese que siempre habrá dos tales que el menor dividirá (sin dejar residuo) al mayor.

48 Problema La sucesión de *Fibonacci* está dada por

$$f_0 = 0, \ f_1 = 1, \ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

esto es, cada número luego del segundo es la suma de los dos precedentes. Así la sucesión de Fibonacci comienza por

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots.$$

Demuéstrese mediante inducción matemática , que para entero $n \geq 1$, se tiene

$$f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n.$$

49 Problema En el país *Pesimista*, las monedas sólo vienen en cantidades de 3 y 5 pesos. Demostrar que toda cantidad de 8 o más pesos se puede pagar con estas monedas.

50 Problema Utilícese inducción para demostrar que para todo número natural $n > 0$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

51 Problema Utilícese inducción para demostrar que para entero natural n, la candidad $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es siempre divisible por 9. Puede avalarse de la identidad

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

52 Problema Demostrar que para todo entero $n \geq 1$,

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}.$$

53 Problema Sea $n \geq 1$ un entero y sea $\mathscr{C}$ un conjunto constituido de $2n+1$ enteros positivos no nulos, no necesariamente distintos. Supóngase que $\mathscr{C}$ tiene la propiedad siguiente: Si $x \in \mathscr{C}$, entonces existe partición de $\mathscr{C} \setminus \{x\}$ en dos subconjuntos A y B de n elementos cada uno tal que la suma de los elementos en A es igual a la suma de los elementos en B. Demostrar que todos los elementos de $\mathscr{C}$ son idénticos.

54 Problema Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ enteros naturales no nulos. Supóngase que

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = b_1+b_2+\cdots+b_n < mn.$$

Demostrar que siempre es posible suprimir unos cuantos términos de uno y otro lado (¡pero no todos!) y conservar la igualdad de la suma de los términos restantes.

55 Problema Mediante inducción, demuestre que todo triángulo equilátero puede ser descompuesto en n subtriángulos equiláteros (no necesariamente del mismo tamaño) para toda $n \geq 6$.

56 Problema Sea s un entero estrictamente positivo. Demostrar que en el intervalo cerrado $[s; 2s]$ hay una potencia de 2.

1.5 Buen orden

57 Axioma (Axioma del buen orden) Todo conjunto no vacuo $\mathscr{S}$ de números naturales posee un elemento mínimo.

58 Ejemplo Demuéstrese que no existe ningún entero natural en el intervalo $]0;1[$.

►**Resolución:** *Presúmase al contrario que el conjunto $\mathscr{S}$ de enteros naturales en $]0;1[$ no es nulo. Por el axioma del buen orden, este conjunto debe poseer un elemento mínimo, llamémosle m. Ahora bien, $0 < m^2 < m < 1$, y por tanto $m^2 \in \mathscr{S}$. Pero esto quiere decir que $\mathscr{S}$ tiene un entero positivo m^2 estrictamente menor que su mínimo elemento m, contradicción, y por lo tanto $\mathscr{S} = \varnothing$.* ◄

59 Ejemplo Si a, b, c son enteros tales que $a^6+2b^6 = 4c^6$, demuéstrese que $a = b = c = 0$.

►**Resolución:** *Es evidente que podemos restringirnos al caso donde todas las incógnitas son mayores o iguales a 0. Escójase un trío a, b, c satisfaciendo la ecuación y con*

$$\max(a,b,c) > 0$$

tan pequeño como fuere posible. Si $a^6+2b^6 = 4c^6$ entonces a deberá ser par, $a = 2a_1$. Esto conlleva a $32a_1^6+b^6 = 2c^6$. Luego también $b = 2b_1$ y así $16a_1^6+32b_1^6 = c^6$. Finalmente esto dá $c = 2c_1$, por lo cual $a_1^6+2b_1^6 = 4c_1^6$. Pero $\max(a_1,b_1,c_1) < \max(a,b,c)$ lo que contradice la minimalidad de $\max(a,b,c)$. Así pues se debe tener que $\max(a,b,c) = 0$ y todas las incógnitas son 0. ◄

60 Ejemplo (IMO 1988) Si a, b son enteros positivos tales que $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ es entero, entonces demuestre que $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ cuadrado es.

►**Resolución:** *Supóngase que $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab} = k$ es un contra-ejemplo de un entero que no es cuadrado, con $\max(a,b)$ tan pequeño como fuere posible. Sin pérdida de generalidad presúmase que $a < b$, ya que si $a = b$ entonces then*

$$0 < k = \frac{2a^2}{a^2+1} < 2,$$

forzando $k = 1$, un cuadrado.

Ahora bien, $a^2+b^2-k(ab+1)=0$ es una ecuación cuadrática en b, con suma de raíces ka y producto de raíces a^2-k. Sean b_1,b sus raíces, de modo que $b_1+b=ka$ y $b_1b=a^2-k$.

Si a,k son enteros positivos, el suponer que $b_1<0$ es incompatible con $a^2+b_1^2=k(ab_1+1)$. Como k no es cuadrado, el suponer $b_1=0$ es incompatible con $a^2+0^2=k(0\cdot a+1)$. Además

$$b_1=\frac{a^2-k}{b}<\frac{b^2-k}{b}<b.$$

Entonces hemos encontrado otro entero b_1 para el cual $\dfrac{a^2+b_1^2}{1+ab_1}=k$ y que es menor que $\max(a,b)$, contradicción. Entonces pues k cuadrado es. ◀

Tarea

61 Problema Demostrar que la serie infinita de cuadrados

$$1,4,9,16,\ldots,$$

no contiene ninguna progresión aritmética infinita.

62 Problema Demostrar que cuartetos de enteros estrictamente positivos (x,y,z,w) satisfaciendo la ecuación $x^2+y^2=3(z^2+w^2)$ no existen.

1.6 Condiciones extremas

63 Ejemplo (Problema de Sylvester) Un conjunto de n puntos en el plano posee la propiedad que toda línea pasando por dos de ellos siempre pasa por un tercero de ellos. Demuéstrese que los puntos están alineados.

▶**Resolución:** *Si los puntos no estuviesen alienados, entre todos los pares (p,L) de puntos p no sobre la línea L habrá uno minimizando la distancia d entre p y L. Sea f el pie de la perpendicular de p a L, como en la figura 1.9. Por hipótesis hay al menos tres puntos a,b,c sobre L. Dos de éstos, digamos a y b, están del mismo lado que f y uno de ellos, digamos b, es más cercano a f. La distancia de b a la recta ap es menor que d, contradicción.* ◀

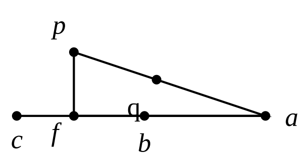


Figure 1.9: Ejemplo 63

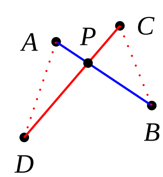


Figure 1.10: Ejemplo 64.

64 Ejemplo De $2n$ puntos en el plano, n son rojos, n son azules y ningún trío de entre ellos es colineal. Sortéanse los puntos en n pares de tal manera que cada par tiene un punto rojo y otro azul y se forman n segmentos uniendo cada par de puntos. ¿Existirá un apareamiento para el cual ningún par de segmentos se intersecte?

▶**Resolución:** *Sí existe. El número de apareamientos es finito, luego ha de existir una manera de parear los puntos de modo que la distancia total de los segmentos sea mínima. Sostenemos que bajo estas condiciones ningún par de segmentos se intersecará.*

Supóngase que bajo las condiciones de mínima distancia arriba estipuladas existe un par de segmentos AB y CD que se intersecan en el punto P, como en la figura 1.10. En virtud de la desigualdad del triángulo

$$AD + BC < AP + PD + BP + PC = AB + CD,$$

minimizando la ya minimizada distancia, contradicción.

◀

Tarea

65 Problema (BMO 1975) Siete puntos se encuentran sobre un disco cerrado de radio 1. Si las distancias mutuas entre todos estos puntos son ≥ 1, demostrar que el centro del disco pertenece a esta colección de puntos.

Chapter 2

Álgebra y aritmética

2.1 Identidades algebraicas

Una de las identidades más útiles en la resolución de problemas es la diferencia de cuadrados

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y).$$

Muchas expresiones se pueden factorizar si se convierten en diferencias de cuadrados. Por ejemplo

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

Otra identidad útil es la de diferencia de cubos

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2).$$

Si n es un entero positivo tenemos en general el siguiente teorema.

66 Teorema Sea n un entero positivo. Entonces

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Demostración: *Primero demostraremos que si $a \neq 1$, entonces*

$$1 + a + a^2 + \cdots a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Póngase

$$S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}.$$

Entonces

$$aS = a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n.$$

Luego

$$S - aS = (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) - (a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n) = 1 - a^n,$$

y al ver que

$$(1-a)S = S - aS = 1 - a^n,$$

se obtiene el resultado. Poniendo ahora $a = \frac{x}{y}$, *se ve que*

$$1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^n}{1 - \frac{x}{y}}$$

de donde se obtiene

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right) = 1 - \left(\frac{x}{y}\right)^n,$$

lo que equivale a

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}\right) = 1 - \frac{x^n}{y^n}.$$

Multiplicando por y^n *uno y otro lado*

$$y\left(1 - \frac{x}{y}\right)y^{n-1}\left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}\right) = y^n\left(1 - \frac{x^n}{y^n}\right),$$

lo que da

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}),$$

el resultado pedido. ❑

☞ *El segundo factor tiene n términos y cada término tiene grado (peso)* $n-1$.

67 Corolario Sean x, y enteros con $x \neq y$ y sea n un entero positivo. Entonces $x - y$ divide a $x^n - y^n$.

Por ejemplo, sin necesidad de hacer cálculos, el corolario anterior nos dice que $781 = 1996 - 1215$ divide a $1996^5 - 1215^5$.

Otros resultados útiles son los siguientes

68 Teorema Si n es un entero positivo impar

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \cdots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

69 Corolario Sean x, y enteros con $x \neq y$ y sea n un entero positivo impar. Entonces $x + y$ divide a $x^n + y^n$.

Por ejemplo $129 = 2^7 + 1$ divide a $2^{861} + 1$ y $1001 = 1000 + 1 = 999 + 2 = \cdots = 500 + 501$ divide a

$$1^{1997} + 2^{1997} + \cdots + 1000^{1997}.$$

70 Ejemplo Si $a^2 + b^2 = 1$ y $ab = 2$, halle $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^4 + b^4$.

►**Resolución:** *Tenemos*

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5,$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = -3,$$

y

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = -7.$$

◄

71 Ejemplo Hallar todos los primos de la forma n^3-1, donde n es un entero positivo.

►**Resolución:** *Como* $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ *y como* $n^2+n+1>1$, *deberemos tener* $n-1=1$. *Luego el único primo de la forma deseada es* $2^3-1=7$. ◄

72 Ejemplo Demostrar que el único primo de la forma n^4+4 es el 5.

►**Resolución:** *Podemos restringirnos a enteros positivos. Vemos que*

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

Si este producto es un número primo entonces el factor más pequeño debe ser igual a 1. Así $n^2-2n+2=1$, *o sea* $(n-1)^2=0$, *esto es* $n=1$. *Así, el único primo de esta forma es* $1^4+4=5$. ◄

73 Ejemplo Dado que 1979 es primo, demostrar que si

$$\frac{u}{b}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1978}.$$

entonces 1979 divide a u.

►**Resolución:** *Rearreglemos la suma de la siguiente manera*

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{1978}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1977}\right)&\\
+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1976}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)&\\
&= \frac{1979}{1\cdot 1978}+\frac{1979}{2\cdot 1977}+\cdots+\frac{1979}{989\cdot 990}.
\end{aligned}$$

Al sumar todas las fracciones arriba en la derecha , vemos que el denominador divide a $1978!$. *Como* 1979 *es primo, ningún factor de* $1978!$ *cancela al 1979 del numerador. Luego, 1979 divide al numerador de la fracción.* ◄

74 Ejemplo Demostrar la siguiente identidad de Catalán:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

►**Resolución:** *La cantidad de la izquierda es*

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)&\\
-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)&\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\\
&\quad -2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)\\
&\quad -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ◄

75 Ejemplo Si $\tan x + \cot x = a$, exprese $\tan^3 x + \cot^3 x$ como un polinomio en a.

►**Resolución:** *Primero observemos que*

$$a^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2,$$

de donde $a^2 - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x$. *Así*

$$\tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cot x + \cot^2 x) = a(a^2 - 3).$$

◄

76 Ejemplo Factorizar

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80}.$$

►**Resolución:** *Pongamos* $S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{80}$. *Entonces* $xS = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{80} + x^{81} = S - 1 + x^{81}$. *De aquí*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80} = \frac{x^{81} - 1}{x - 1}.$$

Luego

$$\frac{x^{81} - 1}{x - 1} = \frac{x^{81} - 1}{x^{27} - 1} \cdot \frac{x^{27} - 1}{x^9 - 1} \cdot \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Por lo tanto

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{80} = (x^{54} + x^{27} + 1)(x^{18} + x^9 + 1)(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1).$$

◄

77 Ejemplo Hallar la raíz cuadrada de

$$5 + 2\sqrt{6}.$$

►**Resolución:** *Observe que*

$$5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2.$$

Luego

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

◄

78 Ejemplo Simplificar

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

►**Resolución:** *Como* $1 = n + 1 - n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, *entonces*

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} & = & \sqrt{2}-\sqrt{1}\\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} & = & \sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} & = & \sqrt{4}-\sqrt{3}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} & = & \sqrt{100}-\sqrt{99},\end{array}$$

y así

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=\sqrt{100}-\sqrt{1}=9.$$

◀

79 Ejemplo Demostrar que para todo entero positivo n, la expresión

$$2903^n-803^n-464^n+261^n$$

es siempre divisible por 1897.

►**Resolución:** *Por el Teorema 66,* 2903^n-803^n *es divisible por* $2903-803=2100=7\cdot 300$ *y* 261^n-464^n *es divisible por* $-203=(-29)\cdot 7$. *Por lo tanto, la expresión es divisible por 7. Además* 2903^n-464^n *es divisible por* $2903-464=2439=9\cdot 271$ *y* -803^n+261^n *es divisible por* $-803+261=-542=-2\cdot 271$. *Así pues, como la expresión es divisible por 7 y por 271 y como estos son relativamente primos, la expresión es pues divisible por* $7\cdot 271=1897$. ◀

Tarea

80 Problema Dado que $987789^2=975727108521$, halle el valor de 987790^2.

81 Problema Calcule $(123456789)^2-(123456791)(123456787)$ mentalmente.

82 Problema Halle a^6+a^{-6} dado que $a^2+a^{-2}=4$.

83 Problema Demostrar que el entero

$$\underbrace{11\ldots 11}_{221\ 1's}$$

es compuesto.

84 Problema Demostrar que 7 divide a

$$2222^{5555}+5555^{2222}.$$

85 Problema Demostrar que 100 divide a $11^{10}-1$.

86 Problema Demostrar que $27195^8-10887^8+10152^8$ es exactamente divisible por 26460.

87 Problema Demostrar que si k es un entero positivo impar

$$1^k+2^k+\cdots+n^k$$

es divisible por

$$1+2+\cdots+n.$$

88 Problema Demostrar que $1492^n-1770^n-1863^n+2141^n$ es divisible por 1946 para todo entero positivo n.

89 Problema Dividir $x^{128}-y^{128}$ por

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})(x^{32}+y^{32})(x^{64}+y^{64}).$$

90 Problema Halle la suma de los factores primos de $2^{16}-1$.

91 Problema Dado que 1002004008016032 tiene un factor primo $p>250000$, hállelo.

92 Problema Si $a^3-b^3=24, a-b=2$, halle el valor de $(a+b)^2$.

93 Problema Hallar

$$\overline{11+\sqrt{72}}.$$

94 Problema Hallar

$$\overline{10+4i\sqrt{6}}.$$

95 Problema Evalúe la suma

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}}.$$

96 Problema Factorice $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{624}$.

97 Problema Expandir el producto

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{1024}).$$

98 Problema Demostrar que si 2^n-1 es un número primo, entonces n es un número primo. Primos de esta forma se llaman *primos de Mersenne.*

99 Problema Demostrar que si 2^n+1 es un número primo, entonces n es una potencia de 2. Primos de esta forma se llaman primos de Fermat.

100 Problema Demuestre que

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right).$$

101 Problema Demostrar que

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

102 Problema Demostrar que

$$(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

103 Problema Demostrar que

$$(x+a)^7-x^7-a^7=7xa(x+a)(x^2+xa+a^2)^2.$$

104 Problema Demostrar que

$$A=x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\cdots+x^{1111}+1$$

es divisible por $B=x^9+x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1$.

105 Problema La diferencia

$$\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$$

es un entero. Hállelo.

106 Problema Demostrar que

$$(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc.$$

2.2 Los enteros

Una de las propiedades más útiles de los enteros es la expresada por el algoritmo de división:

107 Teorema (Algoritmo de división) Sean a, b enteros con $a>0$. Entonces existen enteros q y r con

$$b=aq+r,\quad 0\leq r<a.$$

Por ejemplo, $39=4\cdot 9+3$. Vemos pues que el algoritmo de división discrimina a los enteros según el residuo que dejan al ser divididos por a. Por ejemplo, si $a=2$, descomponemos a los enteros en las dos familias

$$A_0=\{\ldots-4,-2,0,2,4,\ldots\},$$

$$A_1=\{\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots\}.$$

Así pues todo entero es de la forma $2k$ o $2k+1$. Observe que todo entero de la forma $2k+1$ es también de la forma $2t-1$. Si $a=4$ entonces descomponemos a los enteros en las cuatro familias

$$B_0=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\},$$

$$B_1=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\},$$

$$B_2=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\},$$

$$B_3=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}.$$

Así pues, los enteros son de la forma $4k, 4k+1, 4k+2$ o $4k+3$. Observe que todo entero de la forma $4k+1$ es también de la forma $4t-3$ y que todo entero de la forma $4k+3$ es también de la forma $4t-1$.

108 Ejemplo Sea r el residuo cuando $1059, 1417$ y 2312 se dividen por $d>1$. Halle el valor de $d-r$.

►**Resolución:** *Por el algoritmo de división, existen enteros* q_1,q_2,q_3 *con* $1059=dq_1+r, 1417=dq_2+r$ *y* $2312=dq_3+r$. *Restando obtenemos* $1253=d(q_3-q_1), 895=d(q_3-q_2)$ *y* $358=d(q_2-q_1)$. *Como* $7\cdot 179$, $895=5\cdot 179, 358=2\cdot 179$, *vemos que* $d=179$. *Como* $1059=5\cdot 179+164$, $r=164$. *Finalmente,* $d-r=15$.◄

109 Ejemplo Demostrar que el cuadrado de todo entero es de la forma $4k$ o de la forma $4k+1$.

►**Resolución:** *Si el entero es par, es decir de la forma* $2a$, *su cuadrado es* $(2a)^2 = 4a^2$, *que es de la forma* $4k$. *Si el entero es impar, digamos* $2t+1$, *entonces* $(2t+1)^2 = 4(t^2+t)+1$, *que es de la forma* $4k+1$.◄

110 Ejemplo Demostrar que ningún entero en la sucesión

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

es el cuadrado de un entero.

►**Resolución:** *Como es obvio que 11 no es un cuadrado, nos ocuparemos de los demás enteros en la sucesión. Para* $n>2$,

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\ 1's} = \underbrace{11\ldots11}_{n-2\ 1's}00+12-1 = 100\cdot\underbrace{11\ldots11}_{n-2\ 1's}+12-1.$$

Así pues, todo número en esta sucesión es de la forma $4k-1$. *Pero por el ejercicio anterior,* $4k-1$ *no puede ser el cuadrado de ningún entero. Esto completa la demostración.*◄

111 Ejemplo Demuestre que n^2+23 es divisible por 24 para un número infinito de números n.

►**Resolución:** *Tenemos que* $n^2+23 = n^2-1+24 = (n-1)(n+1)+24$. *Luego, las familias* $n = 24m\pm1, m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ *producen infinitos valores de* n^2+23 *que son divisibles por 24.*◄

112 Ejemplo Demostrar que todos los enteros en la sucesión

$$49, 4489, 444889, 44448889, \underbrace{44\ldots44}_{n\ 4's}\underbrace{88\ldots88}_{n-1\ 8's}9$$

son cuadrados.

►**Resolución:** *Observe que*

$$\begin{aligned}
\underbrace{44\ldots44}_{n\ 4's}\underbrace{88\ldots88}_{n-1\ 8's}9 &= \underbrace{44\ldots44}_{n\ 4's}\cdot10^n+\underbrace{88\ldots88}_{n-1\ 8's}\cdot10+9 \\
&= \frac{4}{9}\cdot(10^n-1)\cdot10^n+\frac{8}{9}\cdot(10^{n-1}-1)\cdot10+9 \\
&= \frac{4}{9}\cdot10^{2n}+\frac{4}{9}\cdot10^n+\frac{1}{9} \\
&= \frac{1}{9}(2\cdot10^n+1)^2 \\
&= \left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Nos falta demostrar que esta última cantidad es entera, esto es, que 3 *divide a* $2\cdot10^n+1 = 2\underbrace{00\ldots00}_{n-1\ 0's}1$. *Pero la suma de los dígitos de esta última cantidad es* 3, *y por lo tanto este entero es divisible por* 3. ◄

113 Ejemplo Demostrar que el cuadrado de todo primo mayor que 3 deja residuo 1 al ser dividido por 12.

►**Resolución:** *Si* $p>3$ *es primo, entonces* p *es de la forma* $12k\pm1, 12k\pm5$. *Ahora bien*

$$(12k\pm1)^2 = 12(12k^2\pm2k)+1$$

y

$$(12k \pm 5)^2 = 12(12k^2 \pm 10k + 2) + 1.$$

Esto demuestra la aserción.◀

114 Ejemplo Demostrar que si ambos p y $8p-1$ son primos, entonces $8p+1$ es compuesto.

▶**Resolución:** *Si* $p = 3$, $8p-1 = 23$ *y* $8p+1 = 25$, *luego la aseveración se cumple para* $p = 3$. *Si* $p > 3$, *p es de la forma* $3k+1$ *o* $3k+2$. *Si* $p = 3k+1$, $8p-1 = 24k-7$ *y* $8p+1 = 24k-6$, *que es divisible por 6 y por lo tanto no es primo. Si* $p = 3k+2$, $8p-1 = 24k-15$ *no es primo.*◀

115 Ejemplo Demostrar que si n es un entero positivo tal que $2n+1$ es un cuadrado, entonces $n+1$ es la suma de dos cuadrados consecutivos.

▶**Resolución:** *Como* $2n+1$ *es un cuadrado impar, tenemos* $2n+1 = (2t+1)^2$ *para algún entero* t. *Resolviendo para n,*

$$n = \frac{(2t+1)^2 - 1}{2} = 2t^2 + 2t.$$

Luego $n+1 = t^2 + (t+1)^2$, *la suma de dos cuadrados consecutivos.*◀

116 Ejemplo Demostrar que si $3n+1$ es un cuadrado, entonces $n+1$ es la suma de tres cuadrados.

▶**Resolución:** *Es claro que* $3n+1$ *no es un múltiplo de* 3, *luego* $3n+1 = (3k \pm 1)^2$. *De aquí*

$$n+1 = \frac{(3k \pm 1)^2 - 1}{3} + 1 = 3k^2 \pm 2k + 1 = k^2 + k^2 + (k \pm 1)^2,$$

como queríamos demostrar.◀

117 Ejemplo Hallar todos los enteros con dígito inicial 6 tales que si se les suprime este dígito incial,el número resultante es $1/25$ del número original.

▶**Resolución:** *Sea x el entero buscado. Entonces* $x = 6 \cdot 10^n + y$ *donde y es un entero positivo. La condición del problema estipula que*

$$y = \frac{1}{25}\left(6 \cdot 10^n + y\right),$$

o sea,

$$y = \frac{10^n}{4} = 25 \cdot 10^{n-2}.$$

Esto requiere $n \geq 2$ *y por lo tanto* $y = 25, 250, 2500, 25000, etc.$. *Luego* $x = 625, 6250, 62500, 625000, etc.$.◀

118 Ejemplo Sea A un entero positivo y A' sea el entero positivo resultante de alguna permutación específica de los dígitos de A. Demostrar que si $A + A' = 10^{10}$ entonces A es divisible por 10.

▶**Resolución:** *Claramente,* A *y* A' *deberán tener 10 dígitos cada uno. Pongamos pues*

$$A = \overline{a_{10}a_9a_8 \ldots a_1}$$

y

$$A' = \overline{b_{10}b_9b_8 \ldots b_1},$$

donde $a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots, 10$ *son los dígitos de* A *y* A' *respectivamente. Ahora, como* $A + A' = 10000000000$, *deberemos tener que* $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \cdots = a_i + b_i = 0$ *y*

$$a_{i+1} + b_{i+1} = 10, a_{i+2} + b_{i+2} = \cdots = a_{10} + b_{10} = 9,$$

para algún subíndice $i, 0 \le i \le 9$. *Note que si* $i = 9$ *no hay ninguna suma de las* $a_{i+2} + b_{i+2}, a_{i+3} + b_{i+3}, \ldots$ *y si* $i = 0$ *no hay ninguna suma de las* $a_1 + b_1, \ldots, a_i + b_i$.

Sumando,

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_i + b_i + a_{i+1} + b_{i+1} + \cdots + a_{10} + b_{10} = 10 + 9(9 - i).$$

Ahora bien, si i es par, $10 + 9(9 - i)$ *es impar y si i es impar* $10 + 9(9 - i)$ *es par. Pero como*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{10},$$

tenemos

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots + a_i + b_i + a_{i+1} + b_{i+1} + \cdots + a_{10} + b_{10} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}),$$

un entero par. Colegimos que i es impar, lo que necesariamente implica $a_1 = b_1 = 0$, *esto es, A y* A' *son ambos divisibles por 10.*◀

119 Ejemplo ¿Cuántos ceros hay al final de 999!?

▶**Resolución:** *El número de ceros está determinado por la potencia mayor de 10 que divide a* $999!$. *Como hay menos mútiplos de 5 en* $\{1, 2, \ldots, 999\}$ *que múltiplos de 2, el número de ceros está pues determinado por la potencia mayor de 5 que divide a* $999!$. *Esta es*

$$\left[\frac{999}{5}\right] + \left[\frac{999}{5^2}\right] + \left[\frac{999}{5^3}\right] + \left[\frac{999}{5^4}\right] = 199 + 39 + 7 + 1 = 246.$$

Por lo tanto, 999! termina en 246 ceros.◀

120 Ejemplo La suma de enteros positivos es 1996. ¿Cuál es el valor máximo de su producto?

▶**Resolución:** *Tenemos enteros positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *con* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1996$. *Es claro que para maximizar* $a_1 a_2 \cdots a_n$, *ninguna de las* a_k*'s puede ser igual a 1. Demostraremos que para obtener un producto máximo deberemos tener la mayoría de las* $a_k = 3$ *y a lo sumo dos* $a_j = 2$. *Supongamos que* $a_j > 4$. *Si substituimos* a_j *por los dos términos* $a_j - 3$ *y 3 la suma no se afecta, pero el producto incrementa pues* $a_j < 3(a_j - 3)$. *Así pues las* a_k*'s son iguales a 2, 3 ó 4. Pero como* $2 + 2 + 2 = 3 + 3$ *y* $2 \times 2 \times 2 < 3 \times 3$, *si hay tres o más 2's, los podemos substituir con 3's. Como* $1996 = 3(665) + 1 = 3(664) + 4$, *el producto máximo es pues* $3^{664} \times 4$.◀

121 Ejemplo Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre divisible por 24.

▶**Resolución:** *Sean* $n - 1, n, n + 1, n + 2$ *los cuatro enteros consecutivos. Uno de ellos es divisible por 3, uno de ellos es de la forma* $4k$ *(y por lo tanto divisible por 4) y otro de ellos es de la forma* $4a + 2$ *(y por ende divisible por 2). Luego el producto es divisible por* $3 \times 4 \times 2 = 24$.◀

122 Ejemplo Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos, diferentes de 0, jamás es un cuadrado.

▶**Resolución:** *Sean* $n - 1, n, n + 1, n + 2$ *cuatro enteros consecutivos. Entonces su producto P es*

$$P = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) = (n^3 - n)(n + 2) = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n.$$

Ahora bien,

$$(n^2 + n - 1)^2 = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n + 1 = P + 1 > P.$$

Como $P \neq 0$ *y P es 1 más que un cuadrado, P no puede ser un cuadrado.* ◀

123 Ejemplo Hallar todos los enteros positivos de la forma

$$r + \frac{1}{r},$$

donde r es un número racional.

►**Resolución:** *Demostraremos que la expresión $r+1/r$ es entero sólo cuando $r=1$, en cuyo caso $r+1/r=2$. Sea pues*

$$r+\frac{1}{r}=k,$$

k un entero positivo. Luego

$$r=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

Como k es un entero, r puede ser entero si y sólo si k^2-4 es un cuadrado de la misma paridad que k. Ahora, si $k\geq 3$,

$$(k-1)^2<k^2-4<k^2,$$

esto es, k^2-4 está entre dos cuadrados consecutivos y por lo tanto no puede ser un cuadrado. Si $k=1$, $\sqrt{k^2-4}$ no es real. Si $k=2$, $k^2-4=0$. Luego, $r+1/r=2$, esto es, $r=1$. Esto termina la demostración. ◄

124 Ejemplo ¿Para cuántos enteros n en $\{1,2,3,\ldots,100\}$ es el dígito de las decenas de n^2 impar?

►**Resolución:** *En el subconjunto $\{1,2,\ldots 10\}$ hay sólo dos valores de n (4 y 6) para los cuales el dígito de las decenas de n^2 es impar. Ahora bien, $(n+10)^2=n^2+20n+100$ tiene la misma paridad en su dígito de las decenas que el dígito de las decenas de n^2. Luego, hay $2\times 10=20$ enteros n para los cuales se verifica la condición prescrita.* ◄

Tarea

125 Problema Sea a el entero

$$a=\underbrace{111\ldots1}_{m\ 1's}$$

y sea b el entero

$$b=1\underbrace{000\ldots0}_{m-1\ 0's}5.$$

Demostrar que $ab+1$ es un cuadrado perfecto.

126 Problema Demostrar que el cuadrado de un entero es de la forma $3k$ o $3k+1$. Luego demostrar que si los lados de un triángulo rectángulo son enteros, entonces 3 divide a alguno de los lados.

127 Problema Hallar la suma

$$5+55+555+\cdots+\underbrace{5\ldots5}_{n\ 5's}.$$

128 Problema ¿Qué dígitos aparecen en el producto

$$\underbrace{3\ldots3}_{666\ 3's}\cdot\underbrace{6\ldots6}_{666\ 6's}?$$

129 Problema Demostrar que no existe ningún entero con la propiedad de que si su dígito inicial se suprime, el entero resultante es $1/35$ del entero inicial.

130 Problema ¿Cuál es la potencia mayor de 7 que divide a 1000!?

131 Problema Demostrar que la suma de todos los enteros de n dígitos, $n\geq 3$, es

$$494\underbrace{99\ldots9}_{n-3\ 9's}55\underbrace{00\ldots0}_{n-2\ 0's}.$$

132 Problema Demostrar que para todo entero positivo n,

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n\ 1's}-\underbrace{22\ldots2}_{n\ 2's}$$

es un cuadrado.

133 Problema Demostrar que para todo número $a\neq 0, a\neq\pm i\sqrt{3}$ se verifica la fórmula de Reyley (1825):

$$a=\left(\frac{a^6+45a^5-81a^2+27}{6a(a^2+3)^2}\right)^3+\left(\frac{-a^2+30a^2-9}{6a(a^2+3)}\right)^3+\left(\frac{-6a^3+18a}{(a^2+3)^2}\right)^3.$$

Si a es racional, esto demuestra que todo número racional puede expresarse como la suma de tres cubos de números racionales.

134 Problema Demostrar que para $n\geq 2$, la expresión

$$\frac{n^3+(n+2)^3}{4}$$

es un entero compuesto.

2.3 Aritmética modular

Comenzaremos primero con la siguiente definición. Si $a\neq 0$ es un entero, decimos que a *divide* al entero b (escrito $a|b$) si existe un entero k con $ak=b$. Por ejemplo, $11|99$ porque $11\cdot 9=99$.

Las siguientes propiedades de divisibilidad son obvias. Sean a,b,c,x,y enteros. Entonces

$$ab \neq 0, a|b,\ b|c \Longrightarrow a|c \tag{2.1}$$

Por ejemplo, $11|99$ y $33|330$ implica que $11|330$.

$$a \neq 0, a|b,\ a|c \Longrightarrow a|(xb+yc) \tag{2.2}$$

También, $7|21$ y $7|49$ implica que 7 divide a $3\cdot 21 - 2\cdot 49 = -35$.

Si a no divide a b escribimos $a \not| b$. Note además que $a|c,\ b|c$ *no necesariamente implica que* $ab|c$. Por ejemplo, $2|6, 6|6$ pero claramente $12 = 2\cdot 6 \not| 6$.

Dado un entero $n \geq 2$, el algoritmo de división distribuye los enteros en una de n clases dependiendo del residuo que deje el entero al ser dividido por n. Si u y v dejan el mismo residuo al ser divididos por n, o de manera equivalente, si $u-v$ es divisible por n, entonces decimos que u y v son *congruentes módulo* n y escribimos $u \equiv v \mod n$. Por ejemplo, $3 \equiv 13 \equiv 26 \equiv -7 \mod 10$.

Notamos de paso que si $u \equiv v \mod n$, entonces $u = v + an$ para algún entero a. Por ejemplo, $3 \equiv 24 \mod 7$ y $3 = 24 + (-3)7$.

El siguiente teorema es de suma utilidad.

135 Teorema Sea $n \geq 2$ un entero. Si $x \equiv y$ mod n y $u \equiv v$ mod n entonces

$$ax + bu \equiv ay + bv \mod n.$$

Demostración Como $n|(x-y),\ n|(u-v)$ entonces hay enteros s,t con $ns = x-y,\ nt = u-v$. Luego

$$a(x-y) + b(u-v) = n(as+bt),$$

es decir,

$$n|(ax+bu-ay-bv).$$

Esto último es equivalente a

$$ax + bu \equiv ay + bv \mod n.$$

136 Corolario Sea $n \geq 2$ un entero. Si $x \equiv y$ mod n y $u \equiv v$ mod n entonces

$$xu \equiv yv \mod n.$$

Demostración Pongamos $a = u, b = y$ en el teorema anterior.

137 Corolario Sea $n > 1$ un entero, $x \equiv y \mod n$ y j un entero positivo. Entonces $x^j \equiv y^j \mod n$.

138 Ejemplo Hallar el residuo cuando 6^{1987} es dividido por 37.

►**Resolución:** $6^2 \equiv -1$ *mod 37. Así pues,* $6^{1987} \equiv 6\cdot 6^{1986} \equiv 6(6^2)^{993} \equiv 6(-1)^{993} \equiv -6 \equiv 31$ *mod 37.* ◄

139 Ejemplo Hallar el residuo cuando

$$12233 \cdot 455679 + 87653^3$$

es dividido por 4.

►**Resolución:** $12233 = 12200 + 32 + 1 \equiv 1$ *mod 4. De manera semejante,* $455679 = 455600 + 76 + 3 \equiv 3$, $87653 = 87600 + 52 + 1 \equiv 1$ *mod 4. Así*

$$12233 \cdot 455679 + 87653^3 \equiv 1\cdot 3 + 1^3 \equiv 4 \equiv 0 \mod 4.$$

O sea, que $12233 \cdot 455679 + 87653^3$ *es divisible por 4.* ◄

140 Ejemplo Hallar el último dígito de 3^{100}.

►**Resolución:** *Queremos hallar* 3^{100} *mod 10. Observemos que* $3^2 \equiv -1$ *mod 10. Luego,* $3^{100} = (3^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \equiv 1$ *mod 10. Así, el último dígito es el 1.* ◄

141 Ejemplo Demostrar que $7|(2222^{5555} + 5555^{2222})$.

►**Resolución:** $2222 \equiv 3$ *mod 7,* $5555 \equiv 4$ *mod 7 y* $3^5 \equiv 5$ *mod 7. Ahora bien,* $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \equiv (3^5)^{1111} + (4^2)^{1111} \equiv 5^{1111} - 5^{1111} \equiv 0$ *mod 7, lo que demuestra la aserción.* ◄

142 Ejemplo Hallar el dígito de las unidades de 7^{7^7}.

►**Resolución:** *Tenemos que hallar* 7^{7^7} *mod 10. Ahora bien, como* $7^2 \equiv -1$ *mod 10, entonces tenemos* $7^3 \equiv 7^2 \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3$ *mod 10 y* $7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv 1$ *mod 10. Además,* $7^2 \equiv 1$ *mod 4 y por lo tanto* $7^7 \equiv (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 3$ *mod 4, lo que quiere decir que hay un entero t tal que* $7^7 = 3 + 4t$*. Ensamblando todo esto,*

$$7^{7^7} \equiv 7^{4t+3} \equiv (7^4)^t \cdot 7^3 \equiv 1^t \cdot 3 \equiv 3 \bmod 10.$$

Así el último dígito es un 3. ◄

143 Ejemplo Demostrar que 7 divide a $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ para todo número natural n.

►**Resolución:** *Observemos que* $3^{2n+1} \equiv 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n$ *mod 7 y* $2^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n$ *mod 7. Luego*

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \cdot 2^n \equiv 0 \bmod 7,$$

para todo número natural n. ◄

144 Ejemplo ¿Qué dígitos debe substituirse por a y b en $30a0b03$ de tal manera que el entero resultante sea divisible por 13 ?

►**Resolución:** *Como* $30a0b03 = 3 + 100b + 10000a + 3000000$, *observamos que* $30a0b03 \equiv 3 + 9b + 3a + 3 \equiv 6 + 9b + 3a$ *mod 13. Para que* $30a0b03$ *sea divisible por 13 necesitamos* $9b + 3a \equiv 7$ *mod 13. Aquí claro está, debemos tener* $0 \leq a, b \leq 9$*. Por inspección vemos que* $a = 8, b = 1; a = 5, b = 2; a = 2, b = 3; a = 9, b = 5; a = 6, b = 6; a = 3, b = 7; a = 0, b = 8$ *Luego 3080103, 3050203, 3020303, 3090503, 3060603, 3030703, 3000803 son todos divisibles por 13.* ◄

145 Ejemplo Hallar los cuadrados mod 13.

►**Resolución:** *Observemos primero que sólo necesitamos cuadrar los enteros hasta 6, porque* $r^2 \equiv (13 - r)^2$ *mod 13. Cuadrando los enteros no negativos hasta el 6, obtenemos* $0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 4, 3^2 \equiv 9, 4^2 \equiv 3, 5^2 \equiv 12, 6^2 \equiv 10$ *mod 13. Por lo tanto, los cuadrados mod 13 son 0, 1, 4, 9, 3, 12, y 10.* ◄

146 Ejemplo Demostrar que la ecuación $x^2 - 5y^2 = 2$ no tiene soluciones enteras.

►**Resolución:** *Si* $x^2 = 2 - 5y^2$*, entonces* $x^2 \equiv 2$ *mod 5. Pero 2 no es un cuadrado mod 5.* ◄

147 Ejemplo Demostrar la siguiente observación de Euler: $2^{32} + 1$ es divisible por 641.

►**Resolución:** *Observemos que* $641 = 2^7 \cdot 5 + 1 = 2^4 + 5^4$*. Luego* $2^7 \cdot 5 \equiv -1$ *mod 641 y* $5^4 \equiv -2^4$ *mod 641. Ahora bien,* $2^7 \cdot 5 \equiv -1$ *mod 641 nos da* $5^4 \cdot 2^{28} = (5 \cdot 2^7)^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$ *mod 641. Esta útima congruencia y* $5^4 \equiv -2^4$ *mod 641 nos da* $-2^4 \cdot 2^{28} \equiv 1$ *mod 641, lo que significa que* $641|(2^{32} + 1)$.◄

148 Ejemplo Hallar un número infinito de enteros n tal que $2^n + 27$ sea divisible por 7.

►**Resolución:** *Observemos que* $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1, 2^4 \equiv 2, 2^5 \equiv 4, 2^6 \equiv 1$ *mod 7 y así* $2^{3k} \equiv 1$ *mod 3 para todos los enteros positivos k. Luego* $2^{3k} + 27 \equiv 1 + 27 \equiv 0$ *mod 7 para todos los enteros positivos k. Esto produce una familia infinita de enteros* $n = 3k, k = 1, 2, \ldots$ *tal que* $2^n + 27$ *es divisible por 7.* ◄

149 Ejemplo ¿Existen acaso enteros positivos x, y tales que $x^3 = 2^y + 15$?

►**Resolución:** *No. Los cubos mod 7 son 0, 1, y 6. Ahora bien, cada potencia de de 2 es congruente a 1, 2, ó 4 mod 7. Así pues,* $2^y + 15 \equiv 2, 3,$ *or 5 mod 7. Esto es imposible.* ◄

150 Ejemplo Demostrar que $2^k - 5, k = 0, 1, 2, \ldots$ nunca deja residuo 1 cuando es dividido por 7.

►**Resolución:** $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 1$ *mod 7 y este ciclo de tres se repite. Así pues,* $2^k - 5$ *deja residuos 3, 4, ó 6 al ser dividido por 7.* ◄

151 Ejemplo (USAMO 1979) Determine todas las soluciones no negativas

$$(n_1, n_2, \ldots, n_{14})$$

de la ecuación diofántica

$$n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$$

de haberlas.

►**Resolución:** *No hay tales soluciones. Todas las cuartas potencias mod 16 son o bien* $\equiv 0$ *o bien* $\equiv 1$ *mod 16. Esto significa que*

$$n_1^4 + \cdots + n_{14}^4$$

es a lo sumo 14 mod 16. Pero $1599 \equiv 15 \mod 16$. ◄

Usando congruencias y el sistema de numeración decimal podemos obtener varias reglas de divisibilidad. La más famosa es quizás la siguiente.

152 Teorema Regla de los 9's Un número natural n es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Demostración Sea $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ la expansión en base-10 de n. Como $10 \equiv 1$ mod 9, tenemos $10^j \equiv 1$ mod 9. Colegimos que $n = a_k 10^k + \cdots + a_1 10 + a_0 \equiv a_k + \cdots + a_1 + a_0$, de donde resulta la aserción.

153 Ejemplo (AHSME 1992) Los enteros de dos dígitos desde el 19 hasta el 92 se escriben consecutivamente para obtener el entero

$$192021222324 \cdots 89909192.$$

¿Cuál es la potencia mayor de 3 que divide a este número?

►**Resolución:** *Por la regla de los 9's este número es divisible por 9 si y sólo si*

$$19 + 20 + 21 + \cdots + 92 = 37^2 \cdot 3$$

lo es. Por lo tanto, el número es divisible por 3 pero no por 9. ◄

154 Ejemplo (IMO 1975) Cuando 4444^{4444} se escribe en notación decimal, la suma de sus dígitos es A. Sea B la suma de los dígitos de A. Hallar la suma de los dígitos de B. (A y B se escriben en notación decimal.)

►**Resolución:** *Tenemos que* $4444 \equiv 7 \mod 9$, *y por lo tanto* $4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \mod 9$. *Así* $4444^{4444} = 4444^{3(1481)} \cdot 4444 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 7 \mod 9$. *Sea C la suma de los dígitos de B.*

Por la regla de los 9's, $7 \equiv 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \mod 9$. *Ahora bien,* $4444 \log_{10} 4444 < 4444 \log_{10} 10^4 = 17776$. *Esto significa que* 4444^{4444} *tiene a lo sumo 17776 dígitos, así la suma de los dígitos de* 4444^{4444} *es a lo sumo* $9 \cdot 17776 = 159984$, *de aquí* $A \leq 159984$. *Entre los números naturales* ≤ 159984 *el que tiene la suma máximal de sus dígitos es 99999, de donde colegimos que* $B \leq 45$. *De todos los enteros naturales* ≤ 45, *39 tiene la máxima suma dígitoal, es decir 12. Así la suma de los dígitos de B es a lo sumo 12. Pero como* $C \equiv 7$ *mod 9, se sigue que* $C = 7$. ◄

Las congruencias mod 9 a veces pueden ser usadas para verificar multiplicaciones. Por ejemplo, $875961 \cdot 2753 \neq 2410520633$, ya que si esto fuese cierto entonces

$$(8+7+5+9+6+1)(2+7+5+3) \equiv 2+4+1+0+5+2+0+6+3+3 \mod 9.$$

Pero esto dice que $0 \cdot 8 \equiv 8 \mod 9$, que es patentemente falso.

Se puede establecer un criterio de divisibilidad por 11 de una manera semejante. Sea $n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$. Como $10 \equiv -1 \mod 11$, tenemos $10^j \equiv (-1)^j \mod 11$. Por lo tanto $n \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0 \mod 11$, o sea, n es divisible por 11 si y sólo si la suma alternante de sus dígitos es divisible por 11. Por ejemplo, $912282219 \equiv 9-1+2-2+8-2+2-1+9 \equiv 7 \mod 11$ y así 912282219 no es divisible por 11, mientras que $8924310064539 \equiv 8-9+2-4+3-1+0-0+6-4+4-3+9 \equiv 0 \mod 11$, y así 8924310064539 es divisible por 11.

Tarea

155 Problema Si $62ab427$ es un múltiplo de 99, hallar los dígitos a y b.

156 Problema Demostrar que un número natural es divisible por $2^n, n = 1,2,3,\ldots$ si y sólo si el número formado por sus últimos n dígitos es divisible por 2^n.

157 Problema Hallar el último dígito de

$$2333333334 \cdot 9987737 + 12 \cdot 21327 + 12123 \cdot 99987.$$

158 Problema Demostrar que la ecuación

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 122$$

no posee soluciones enteras.

159 Problema Hallar cuántas $n, 1 \leq n \leq 25$ poseen la propiedad que $n^2 + 15n + 122$ es divisible por 6.

160 Problema Demostrar que en cualquier subconjunto de 55 elementos tomado del conjunto $\{1,2,3,\ldots,100\}$, siempre se encontrarán dos elementos que diferirán por 9.

161 Problema (AIME, 1994) La sucesión creciente

$$3, 15, 24, 48, \ldots,$$

consiste de aquellos mútiplos de 3 que son uno menos de un cuadrado. ¿Cuál es el residuo cuando el 1994avo término de esta sucesión se divide por 1000?

162 Problema Demostrar que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n > 3$, existe un entero k tal que $n \not| (k+a), n \not| (k+b), n \not| (k+c)$.

163 Problema (AIME 1983) Sea $a_n = 6^n + 8^n$. Determine el residuo cuando a_{83} se divide por 49.

164 Problema Demostrar que si $9|(a^3 + b^3 + c^3)$, entonces $3|abc$, para enteros a, b, c.

165 Problema Describa todos los enteros n tal que $10|n^{10} + 1$.

166 Problema Demostrar que si

$$a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4, \ldots$$

son todos enteros, entonces a y b son también enteros.

167 Problema Hallar los últimos dos dígitos de 3^{100}.

168 Problema (AHSME 1992) ¿Cuál es el tamaño del subconjunto mayor S de $\{1,2,\ldots,50\}$ tal que ningún par de elementos distintos de S tenga una suma divisible por 7?

169 Problema Demostrar que la ecuación $x^2 - 7y = 3$ no tiene soluciones enteras.

170 Problema Demostrar que si $7|a^2 + b^2$ entonces $7|a$ y $7|b$.

171 Problema Demostrar que no hay enteros con

$$800000007 = x^2 + y^2 + z^2.$$

172 Problema Demostrar que la suma de los dígitos, en notación decimal, de un cuadrado, no puede ser igual a 1991.

173 Problema Demostrar que

$$7 | 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$$

para todos los números naturales n.

174 Problema ¿Cuántos cuadrados hay mod 2^n?

175 Problema Demostrar que los no-múltiplos de 3 son potencias de 2 mod 3^n.

176 Problema (USAMO 1986) ¿Cuál es el menor entero $n > 1$, para el cual

$$\left(\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n}\right)^{1/2}$$

es un entero?

177 Problema Hallar todos los enteros $a, b, a > 1$ y todos los primos p, q, r que satisfacen la ecuación

$$p^a = q^b + r^a$$

(a, b, p, q, r no son necesariamente diferentes).

178 Problema Si $n > 1$ es un entero, demostrar que $n^n - n^2 + n - 1$ es divisible por $(n-1)^2$.

179 Problema (Putnam 1952) Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

un polinomio de grado n con coeficientes enteros. Si a_0, a_n y $f(1)$ son todos nones, demostrar que $f(x) = 0$ no tiene raíces racionales.

180 Problema (AHSME 1991) Un entero de n dígitos es *lindo* si sus n dígitos son una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y sus primeros k dígitos forman un entero que es divisible por k para toda $k, 1 \leq k \leq n$. Por ejemplo, 321 es lindo de tres dígitos ya que 1 divide a 3, 2 divide a 32 y 3 divide a 321. ¿Cuántos enteros lindos de seis dígitos hay?

181 Problema Un viejo recibo está algo borroso. Dice que 88 pollos costaban un total de \$$x4.2y$, donde x, y son dígitos ilegibles. ¿Cuánto costaba cada pollo?

182 Problema Demostrar que un entero que consiste de 3^n dígitos idénticos es divisible por 3^n.

Chapter 3

Combinatoria

3.1 Las reglas de la multiplicación y la suma

183 Definición (Cardinalidad de un conjunto) Si S es un conjunto, entonces su *cardinalidad* es el número de elementos que éste tiene. Se denotará la cardinalidad de S por $\text{card}\,(S)$.

Comenzaremos nuestro estudio de la combinatoria con los siguientes dos principios fundamentales.

184 Regla (Regla de la suma: Forma disyuntiva) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$, conjuntos finitos mutuamente disjuntos, esto es $E_k \cap E_j = \varnothing$ si $k \neq j$. Entonces

$$\text{card}\,(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = \text{card}\,(E_1) + \text{card}\,(E_2) + \cdots + \text{card}\,(E_k)\,.$$

185 Regla (Regla del producto) Sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$, conjuntos finitos. Entonces

$$\text{card}\,(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k) = \text{card}\,(E_1) \cdot \text{card}\,(E_2) \cdots \text{card}\,(E_k)\,.$$

186 Ejemplo ¿Cuántos pares ordenados de enteros (x, y) hay tales que $0 < |xy| \leq 5$?

►**Resolución:** *Póngase* $E_k = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |xy| = k\}$ *para* $k = 1, \ldots, 5$. *El número deseado es*

$$\text{card}\,(E_1) + \text{card}\,(E_2) + \cdots + \text{card}\,(E_5)\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\} \\
E_2 &= \{(-2,-1),(-2,1),(-1,-2),(-1,2),(1,-2),(1,2),(2,-1),(2,1)\} \\
E_3 &= \{(-3,-1),(-3,1),(-1,-3),(-1,3),(1,-3),(1,3),(3,-1),(3,1)\} \\
E_4 &= \{(-4,-1),(-4,1),(-2,-2),(-2,2),(-1,-4),(-1,4),(1,-4),(1,4),(2,-2),(2,2),(4,-1),(4,1)\} \\
E_5 &= \{(-5,-1),(-5,1),(-1,-5),(-1,5),(1,-5),(1,5),(5,-1),(5,1)\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $4+8+8+12+8 = 40$ *es el número deseado.* ◄

187 Ejemplo Se escribe los divisores positivos de 400 en manera creciente:

$$1,2,4,5,8,\ldots,200,400.$$

¿Cuántos enteros hay en esta sucesión? ¿Cuántos de éstos son cuadrados?

►**Resolución:** *Como* $400 = 2^4 \cdot 5^2$*, cualquier divisor de* 400 *habrá de ser de la forma* $2^a 5^b$ *en donde* $0 \leq a \leq 4$ *y* $0 \leq b \leq 2$*. Luego hay* 5 *maneras de elegir* a *a y* 3 *maneras de elegir* a b*, dando un total de* $5 \cdot 3 = 15$ *divisores positivos.*

Para ser un cuadrado, un divisor de 400 *deberá tener la forma* $2^\alpha 5^\beta$ *con* $\alpha \in \{0,2,4\}$ *y* $\beta \in \{0,2\}$*. Así pues, hay* $3 \cdot 2 = 6$ *divisores de* 400 *que son además cuadrados.* ◄

Arguyendo de la manera mostrada en el ejemplo 187, se obtiene el siguiente teorema.

188 Teorema Tenga el entero positivo n la factorización en primos

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k},$$

en donde los primos p_i son distintos y las enteros a_i son ≥ 1. Si $d(n)$ denota el número de divisores positivos de n, entonces

$$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1).$$

189 Ejemplo (AHSME 1977) ¿Cuántos caminos—consistiendo de una sucesión de segmentos verticales u horizontales y cada segmento uniendo un par adyacente de letras—en la figura 3.1 deletrean $CONTEST$?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C & & & & & & \\
 & & & & & C & O & C & & & & & \\
 & & & & C & O & N & O & C & & & & \\
 & & & C & O & N & T & N & O & C & & & \\
 & & C & O & N & T & E & T & N & O & C & & \\
 & C & O & N & T & E & S & E & T & N & O & C & \\
C & O & N & T & E & S & T & S & T & E & N & O & C
\end{array}$$

Figure 3.1: Problem 189.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & C \\
 & & & & & C & O \\
 & & & & C & O & N \\
 & & & C & O & N & T \\
 & & C & O & N & T & E \\
 & C & O & N & T & E & S \\
C & O & N & T & E & S & T
\end{array}$$

Figure 3.2: Problem 189.

►**Resolución:** *Divídase el diagrama como en la figura 3.2. Ya que cada uno de los caminos requeridos debe utilizar la* T *de abajo a la derecha, se contarán los caminos que comienzan con esta* T *hasta llegar a la* C*. Ya que hay seis filas más a las que se podrá ir y en cada etapa se puede ir o hacia arriba o hacia la derecha, existen pues* $2^6 = 64$ *caminos. La otra porción del diagrama contribuirá* 64 *caminos más. Pero la columna del medio es compartida por ambas porciones, así que hay un total de* $64 + 64 - 1 = 127$ *caminos.* ◄

190 Ejemplo Se escriben los enteros del 1 al 1000 en sucesión. Hállese la suma de todos los dígitos.

►**Resolución:** *Al escribir los enteros del* 000 *al* 999 *(con tres dígitos), se utilizan* $3\times 1000 = 3000$ *dígitos. Cada uno de los* 10 *dígitos está representado de una manera igual y uniforme, así que cada dígito se utiliza* 300 *veces. La suma de los dígitos del* 000 *al* 999 *es pues*

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)(300) = 13500.$$

Por lo tanto, la suma de los dígitos al escribir del 1 *al* 1000 *es* $13500+1 = 13501$.

Aliter: *Pareando los enteros del* 0 *al* 999 *de la siguiente manera*

$$(0,999),\ (1,998),\ (2,997),\ (3,996),\ \ldots,(499,500),$$

se ve que cada par tiene suma de dígitos 27 *y que hay* 500 *pares. Añadiendo* 1 *por la suma de los dígitos de* 1000*, el total requerido es pues*

$$27\cdot 500+1 = 13501.$$

◄

191 Ejemplo Determine cuántos enteros positivos de 3-dígitos pueden escribirse en notación decimal que no tengan al 0 en su expansión. Hállese también la suma de estos números de 3-dígitos.

►**Resolución:** *Hay* $9\cdot 9\cdot 9 = 729$ *enteros positivos de* 3*-dígitos no poseyendo al* 0 *en su expansión decimal. Si* $100x+10y+z$ *es uno de estos enteros, entonces para cada selección fija de una variable, hay* $9\cdot 9 = 81$ *selecciones de las otras dos variables. Luego, la suma requerida es*

$$81(1+2+\cdot+9)100+81(1+2+\cdot+9)10+81(1+2+\cdot+9)1 = 404595.$$

◄

192 Ejemplo Determine cuántos enteros positivos de 3-dígitos pueden escribirse en notación decimal poseyendo al menos un 0 en su expansión. Hállese también la suma de estos números de 3-dígitos.

►**Resolución:** *Utilizando el ejemplo 191, hay* $900-729 = 171$ *tales enteros. La suma de* todos *los enteros de tres dígito es*

$$100+101+\cdots+998+999.$$

Para obtener esta suma, observe que hay 900 *sumandos y que la suma no cambia al cambiar el orden de los sumandos:*

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 100 & + & 101 & + & \cdots & + & 999 \\ S & = & 999 & + & 998 & + & \cdots & + & 100 \\ 2S & = & 1099 & + & 1099 & + & \cdots & + & 1099 \\ & = & 900(1099), & & & & & & \end{array}$$

dando $S = \dfrac{900(1099)}{2} = 494550$. *La suma requerida es pues* $494550-404595 = 89955$. ◄

193 Ejemplo Todos los enteros positivos se escriben en sucesión

$$123456789101112131415161718192021222324\ldots$$

¿Qué dígito ocupa el 206790avo lugar?

►**Resolución:** *Observemos que*

$$1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 9000=38819$$

y que

$$1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 9000+5\cdot 90000=488819.$$

Por lo tanto, el dígito buscado está entre los números de cinco dígitos. Si $5x+38819\geq 206790$*, entonces* $x\geq 33595$ *(el entero* x *es cuánto nos adentramos en los números de cinco dígitos). Así pues, para llegar hasta el* 206790*avo dígito debemos de ir hasta el* 33595*avo número de cinco dígitos, es decir* 43594 *(el primero es* 10000*). Luego, hasta el dígito final de* 43594 *(el* 4 *de las unidades) hemos utilizado* $38819+5\cdot 33595=206794$ *dígitos. Luego, el* 4 *ocupa la posición* 206794*ava, el* 9 *la* 206793*ava, el* 5 *la 206792ava, el* 3 *la* 206791*ava y el* 4 *la* 206790*ava. El dígito requerido es el* 4. ◄

194 Ejemplo ¿Cuántos enteros del 1 al 1000000 tienen al menos un 1 en su expansión decimal?

►**Resolución:** *Hay*

8	*enteros positivos de* 1*-dígito,*
$8\cdot 9=72$	*enteros positivos de* 2*-dígitos,*
$8\cdot 9\cdot 9=648$	*enteros positivos de* 3*-dígitos,*
$8\cdot 9\cdot 9\cdot 9=5832$	*enteros positivos de* 4*-dígitos,*
$8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=52488$	*enteros positivos de* 5*-dígitos,*
$8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=472392$	*enteros positivos de* 6*-dígitos,*

no poseyendo el dígito 1*. Así pues hay*

$$8+72+648+5832+52488+472392=531440$$

entre el 1 *y el* 999999 *no poseyendo el dígito* 1*. Luego hay* $999999-531440=468559$ *poseyendo al menos un* 1 *y así* $468559+1=468560$ *enteros entre el* 1 *y el* 1000000 *teniendo al menos un* 1 *en su expansión decimal.*

Aliter: *Analizaremos los enteros del* 0 *al* 999999*. Al resultado final le sumaremos* 1*, ya que* 1000000 *tiene un* 1 *en su expansión.*

Dividamos este conjunto de un millón de enteros como sigue: en 100000 *decenas*

$$\{0,1,2,\ldots,9\}$$
$$\{10,11,12,\ldots,19\}$$
$$\vdots$$
$$\{999990,999991,\ldots,999999\}.$$

En 10000 *centenas*

$$\{0,1,2,\ldots,99\}$$
$$\{100,101,102,\ldots,199\}$$
$$\vdots$$

$$\{999900, 999901, \ldots, 999999\},$$

etc., hasta llegar a diez 100000*enas*

$$\{0, 1, 2, \ldots, 99999\}$$
$$\{100000, 100001, 100002, \ldots, 199999\}$$
$$\vdots$$
$$\{900000, 900001, \ldots, 999999\}.$$

En la primera decena hay solamente un número, el 1, que tiene un 1 en su numeración decimal. En la segunda decena, los diez enteros tienen un 1 en su numeración decimal.

En la primera centena, cada decena, excepto la segunda, contendrá exactamente un entero que tiene un 1 en su expansión. La segunda decena, claro está, tiene sus diez enteros con 1's en sus expansiones. En consecuencia, la primera centena tiene

$$10 + 9 \cdot 1$$

enteros que tienen el 1 en sus expansiones.

En el primer millar, cada centena excepto la segunda tendrá exactamente $10 + 9 \cdot 1$ *enteros con el 1 en su expansión. La segunda centena, que consiste de los enteros* $100, 101, \ldots 199$ *tendrá sus 100 enteros con el 1 en su expansión. Así pues, el primer millar tendrá exactamente*

$$100 + 9(10 + 9 \cdot 1) = 10^2 + 9 \cdot 10 + 9$$

enteros con el 1 en su expansión.

En la primera decena de millar, cada millar excepto el segundo, tendrá exactamente $10^2 + 9 \cdot 10 + 9$ *enteros con el 1 en su expansión. El segundo millar tendrá sus* 10^3 *enteros con el 1 en su expansión. Luego, en la primera decena de millar hay*

$$10^3 + 9(10^2 + 9 \cdot 10 + 9) = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10 + 9^3$$

enteros con el 1 en su expansión.

Un razonamiento semejante nos lleva a concluir que en la primera centena de millar hay $10^4 + 9(10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9^2 \cdot 10 + 9^3) = 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9^2 \cdot 10^2 + 9^3 \cdot 10 + 9^4$ *enteros con el 1 en su expansión y en los primeros millones hay*

$$10^5 + 9 \cdot 10^4 + 9^2 \cdot 10^3 + 9^3 \cdot 10^2 + 9^4 \cdot 10 + 9^5 = \frac{10^6 - 9^6}{10 - 9} = 468559$$

enteros con el 1 en su expansión. Esto quiere decir que en los enteros del 0 al 999999 hay 468559 enteros con el 1 en su expansión y en los enteros del 1 al 1000000 hay $468559 + 1 = 468560$ *enteros con el 1 en su expansión.* ◀

Tarea

195 Problema Se marcan n puntos, $1, 2, \ldots, n$ sobre una circunferencia, que colocamos a igual distancia unos de los otros. Si el punto marcado 15 está directamente opuesto al marcado 49, ¿cuántos puntos hay en total?

196 Problema ¿Cuántos de los factores de 2^{95} hay que sean mayores que $1,000,000$?

197 Problema Se escribe la sucesión de enteros positivos.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$$

¿Qué dígito ocupa la posición 3000-ava?

198 Problema ¿Cuántos divisores positivos tiene $2^8 3^9 5^2$? ¿Cuál es la suma de estos divisores?

199 Problema Para escribir un libro se utilizaron 1890 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

200 Problema Hallar $d(1260)$, $\sigma(1260)$ y $\phi(1260)$.

201 Problema Los enteros del 1 al 1000 se escriben en orden sobre un círculo. Comenzando con 1, cada quinceavo número es marcado (esto es, $1, 16, 31$, etc.). Este proceso se repite hasta que se marque un número por segunda vez. ¿Cuántos números sin marcar quedan?

202 Problema ¿Cuántos enteros entre 1 y 3012 son divisibles por 5 o por 7 pero no por ambos números?

203 Problema Escribir la versión de cuatro conjuntos del principio de inclusión-exclusión.

204 Problema ¿Cuántos números primos hay entre 1 y 100?

205 Problema Sean x, y, z números reales. Demostrar que

$$\max(x,y) = x+y-\min(x,y)$$

y que

$$\max(x,y,z) = x+y+z-\min(x,y)-\min(y,z)-\min(z,x)+\min(x,y,z).$$

¿Qué relación nota entre estas fórmulas y el principio de inclusión-exclusión?

206 Problema ¿Cuántos enteros entre 1 y 1000000 no son ni cuadrados, ni cubos, ni cuartas, ni quintas potencias?

3.2 Métodos combinatorios

La gran mayoría de los problemas de conteo pertenecen a una de cuatro categorías, que explicaremos mediante el siguiente ejemplo.

207 Ejemplo Considérese el conjunto $\{a,b,c,d\}$. Selecciónese dos letras de entre estas cuatro. Dependiendo de la interpretación se obtendrá una de las siguientes cuatro respuestas.

❶ **Permutaciones con repetición.** El *orden* en que se listan las letras importa y *se permite repetir* letras. En este caso hay $4 \cdot 4 = 16$ selecciones posibles:

aa	ab	ac	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd

❷ **Permutaciones sin repetición.** El *orden* en que se listan las letras importa y *no se permite repetir* letras. En este caso hay $4 \cdot 3 = 12$ selecciones posibles:

	ab	ac	ad
ba		bc	bd
ca	cb		cd
da	db	dc	

❸ **Combinaciones con repetición.** El *orden* en que se listan las letras *no importa* y *se permite repetir* letras. En este caso hay $\dfrac{4 \cdot 3}{2} + 4 = 10$ selecciones posibles:

aa	ab	ac	ad
	bb	bc	bd
		cc	cd
			dd

❹ **Combinaciones sin repetición.** El *orden* en que se listan las letras *no importa* y *no se permite repetir* letras. En este caso hay $\dfrac{4\cdot 3}{2} = 6$ selecciones posibles:

	ab	ac	ad
		bc	bd
			cd

Consideraremos ahora ejemplos de cada situación.

3.2.1 Permutaciones sin repetición

208 Definición Definimos el símbolo ! (factorial), como sigue: $0! = 1$, y para entero $n \geq 1$,

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

$n!$ se lee *n factorial*.

209 Ejemplo Se tiene

$$\begin{aligned} 1! &= 1,\\ 2! &= 1\cdot 2 = 2,\\ 3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6,\\ 4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24,\\ 5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

210 Definición Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n objetos distintos . Una *permutación* de estos objetos es simplemente un rearreglo de ellos.

211 Ejemplo Hay 24 permutaciones de las letras de la palabra $MATH$:

$$\begin{array}{cccccc} MATH & MAHT & MTAH & MTHA & MHTA & MHAT\\ AMTH & AMHT & ATMH & ATHM & AHTM & AHMT\\ TAMH & TAHM & TMAH & TMHA & THMA & THAM\\ HATM & HAMT & HTAM & HTMA & HMTA & HMAT \end{array}$$

212 Teorema Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n objetos distintos. Hay $n!$ permutaciones de ellos.

Demostración: *La primera posición de puede elegir de n maneras, la segunda en $n-1$ maneras, la tercera en $n-2$, etc. Esto da*

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

❑

213 Ejemplo Un librero tiene 5 libros alemanes, 7 libros españoles y 8 libros franceses. Cada libro es diferente de cada otro.

❶ ¿Cuántos arreglos hay de estos libros?

❷ ¿Cuántos arreglos hay de estos libros si los libros deben estar agrupados por lengua?

❸ ¿Cuántos arreglos hay de estos libros si todos los libros franceses deben estar juntos?

❹ ¿Cuántos arreglos hay de estos libros si ningún libro francés está junto a otro libro francés?

►**Resolución:**

❶ *Se permutan* $5+7+8 = 20$ *objetos. Luego, el número de arreglos buscados es* $20! = 2432902008176640000$.

❷ *Agrúpese los libros por lengua lo que garantizará que los libros de una misma lengua estarán juntos. Se permutan los* 3 *grupos en* $3!$ *maneras. Se permutan los libros alemanes en* $5!$ *maneras, los libros españoles en* $7!$ *maneras y los libros franceses en* $8!$ *maneras. Luego el número total de maneras es* $3!5!7!8! = 146313216000$.

❸ *Alíniense los libros alemanes y los libros españoles primero. Al alinear estos* $5+7 = 12$ *libros, se crean* $12+1 = 13$ *espacios (incluyendo el espacio frente al primer libro, los espacios entre los libros y el espacio luego del último libro). Para asegurar que todos los libros franceses yagan uno al lado del otro, "pegamos" los libros franceses y ponemos este bulto en uno de los espacios. Ahora, los libros franceses se permutan en* $8!$ *maneras y los libros no-franceses en* $12!$ *maneras. Luego el total number of permutaciones es*

$$(13)8!12! = 251073478656000.$$

❹ *Alíniense los libros alemanes y los libros españoles primero. Al alinear estos* $5+7 = 12$ *libros, se crean* $12+1 = 13$ *espacios (incluyendo el espacio frente al primer libro, los espacios entre los libros y el espacio luego del último libro). Para asegurar que ningún libro francés yaga junto a otro libro francés, los ponemos en estos espacios. El primer libro francés puede ponerse en cualquiera de* 13 *espacios, el segundo, en cualquiera de* 12*, etc., el octavo libro francés puede ponerse en algún de los restantes* 6 *espacios. Ahora, los libros no-franceses pueden ser permutados en* $12!$ *maneras. Así el de permutaciones es*

$$(13)(12)(11)(10)(9)(8)(7)(6)12!,$$

which es 24856274386944000.

◄

3.2.2 Permutaciones con repetición

Consideramos ahora permutaciones con objetos repetidos.

214 Ejemplo ¿En cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra

$$MASSACHUSETTS \quad ?$$

►**Resolución:** *Póngase subíndices a las repeticiones, formando*

$$MA_1S_1S_2A_2CHUS_3ET_1T_2S_4.$$

Hay ahora 13 *objetos distintos, los que pueden ser permutados en* $13!$ *maneras diferentes, gracias al teorema 212. En cada una de estas* $13!$ *permutaciones,* A_1A_2 *puede permutarse en* $2!$ *maneras,* $S_1S_2S_3S_4$ *puede permutarse en* $4!$ *maneras y* T_1T_2 *puede permutarse en* $2!$ *maneras. Así pues, el sobre-estimado de* $13!$ *es corregido y la cuenta final es*

$$\frac{13!}{2!4!2!} = 64864800.$$

◄

Razonando de manera análoga al ejemplo 214, se podrá demostrar el siguiente teorema.

215 Teorema Si hay k tipos de objetos: n_1 del tipo 1; n_2 del tipo 2; etc. Entonces el número de maneras en que estos $n_1+n_2+\cdots+n_k$ objetos pueden permutarse es

$$\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

216 Ejemplo ¿En cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra *MASSACHUSETTS* en tal manera que la partícula *MASS* esté siempre junta, con las letras en este orden?

►**Resolución:** *La partícula MASS se puede considerar como un bloque de una letra, agregando luego las* 9 *letras* $A, C, H, U, S, E, T, T, S$. *En* $A, C, H, U, S, E, T, T, S$ *hay cuatro* S*'s y dos* T*'s, dando un total de permutaciones de*

$$\frac{10!}{2!2!} = 907200.$$

◄

217 Ejemplo ¿De cuántas maneras se puede escribir el 9 como la suma de tres enteros positivos? Se tendrá cuenta del orden, así pues $1+7+1$ se cuenta aparte de $7+1+1$, etc.

►**Resolución:** *Primero buscaremos soluciones del tipo*

$$a+b+c=9, 1 \le a \le b \le c \le 7$$

y veremos las permutaciones de cada trío. Se tiene

(a,b,c)	Nmero de permutaciones
$(1,1,7)$	$\frac{3!}{2!}=3$
$(1,2,6)$	$3!=6$
$(1,3,5)$	$3!=6$
$(1,4,4)$	$\frac{3!}{2!}=3$
$(2,2,5)$	$\frac{3!}{2!}=3$
$(2,3,4)$	$3!=6$
$(3,3,3)$	$\frac{3!}{3!}=1$

El número deseado es así

$$3+6+6+3+3+6+1=28.$$

◄

218 Ejemplo ¿En cuántas maneras pueden arreglarse las letras de la palabra **MURMUR** de tal manera que letras idénticas no sean adyacentes?

►**Resolución:** *Si comenzáramos con, dígase,* **MU** *entonces las* **R** *se pueden disponer de la manera siguiente:*

M	**U**	**R**		**R**	

,

M	**U**	**R**			**R**

,

M	U		R		R

En el primer caso hay $2! = 2$ *de poner las* **M** *y la* **U** *restantes, en el segundo hay* $2! = 2$ *y en el tercero hay solamente* $1!$. *Así, si se comenzase con* **MU** *se tendría* $2+2+1 = 5$ *arreglos posibles. En general, se puede elegir la primera letra de* 3 *maneras y la segunda en* 2 *maneras. Así pues el número de number of maneras pedidas es* $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.
◀

3.2.3 Combinaciones sin repetición

219 Definición Sean n, k enteros no negativos, con $0 \leq k \leq n$. El símbolo $\binom{n}{k}$ (léase "*n tomando k*") se define como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}.$$

☞ *Obsérvese que en esta última fracción hay k factores tanto en el numerador como en el denominador. Obsérvese también los siguientes valores de frontera*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

220 Ejemplo Se tiene

$$\begin{aligned}
\binom{6}{3} &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20, \\
\binom{11}{2} &= \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55, \\
\binom{12}{7} &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 792, \\
\binom{110}{109} &= 110, \\
\binom{110}{0} &= 1.
\end{aligned}$$

☞ *Ya que* $n-(n-k) = k$, *se satisface para enteros* n, k, $0 \leq k \leq n$, *la siguiente identidad de simetría*

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}}.$$

Ésta se puede interpretar como sigue: el número de maneras de sacar k boletos de un sombrero que tiene n boletos distintos es él mismo número de maneras de elegir n − k boletos que permanezcan dentro del sombrero.

221 Ejemplo

$$\binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55,$$

$$\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792.$$

222 Definición Considérese n distintos. Una *k-combinación* es una selección de k, $(0 \leq k \leq n)$ objetos de entre los n sin tomar en cuenta se orden.

223 Ejemplo Las 2-combinaciones de la lista $\{X,Y,Z,W\}$ son

$$XY, XZ, XW, YZ, YW, WZ.$$

224 Ejemplo Las 3-combinaciones de la lista $\{X,Y,Z,W\}$ son

$$XYZ, XYW, XZW, YWZ.$$

225 Teorema Considérese n objetos distintos y sea k un entero satisfaciendo $0 \leq k \leq n$. El número de k-combinaciones de estos n objetos es $\binom{n}{k}$.

Demostración: *Tómese cualesquiera k objetos. Si se tuviese en cuenta el order, entonces se produciría una lista con*

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

entradas, ya que hay n maneras de elegir el primer *objeto, $n-1$ maneras de elegir el* segundo, *etc. Esta selección particular de k objetos se puede permutar en $k!$ maneras. Luego, el número total de k-combinaciones es*

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

❑

226 Ejemplo ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos tiene el conjunto $\{a,b,c,d,f\}$?

►**Resolución:** *Vea que aquí el orden carece de importancia. Lo que queremos es el número de maneras de seleccionar tres elementos de cinco, el cual es*

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

◄

227 Ejemplo ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de tres personas de entre diez profesores?

►**Resolución:** $\binom{10}{3} = 120$ ◄

228 Ejemplo ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de siete personas con un presidente de entre veinte personas?

►**Resolución:** *Primero se selecciona al presidente de 20 maneras. Luego a los otros 6 de entre los 19 restantes. Así el número de maneras es* $20\binom{19}{6} = 542640$. *O también podemos seleccionar a las 7 personas primero, de* $\binom{20}{7}$ *maneras, y luego al presidente de entre los 7, de 7 maneras. Así el número de maneras es* $7\binom{20}{7} = 542640$, *que concuerda con lo anterior.* ◄

229 Ejemplo ¿De cuántas maneras podemos seleccionar un comité de siete personas con un presidente y un secretario de entre veinte personas? El secretario no sirve de presidente.

►**Resolución:** *De* $20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{5} = 7 \cdot 6 \binom{20}{7} = 3255840$ *maneras.* ◄

230 Ejemplo Se toman tres enteros diferentes del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$. ¿En cuántas formas se pueden tomar de tal manera que su suma sea divisible por 3?

►**Resolución:** *En* $\{1, 2, \ldots, 20\}$ *hay*

$$\begin{array}{ll} 6 & \textit{números que dejan residuo } 0 \textit{ al ser divididos por } 3, \\ 7 & \textit{números que dejan residuo } 1 \textit{ al ser divididos por } 3, \\ 7 & \textit{números que dejan residuo } 2 \textit{ al ser divididos por } 3. \end{array}$$

La suma de tres enteros será divisible por 3 *cuando (a) los tres enteros son divisibles por* 3*; (b) uno de los enteros es divisible por* 3*, uno deja residuo* 1 *y el tercero deja residuo* 2 *al ser divididos por* 3*; (c) los tres dejan residuo* 1 *al ser divididos por* 3*; (d) los tres dejan residuo* 2 *al ser divididos por* 3*. Luego el número de maneras es*

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3} = 384.$$

◄

231 Ejemplo Para contar el número de caminos de longitud mínima de A a B en la figura 3.3 obsérvese que cualquier camino de longitud mínima deberá consistir de 6 movimientos horizontales y de 3 verticales, para un total de $6 + 3 = 9$ movidas. De estas 9 desplazamientos, una vez se hallan elegido las 6 que serán horizontales, las 3 verticales quedan completamente determinadas. Hay así $\binom{9}{6} = 84$ caminos.

232 Ejemplo Para contar el número de caminos de longitud mínima de A a B en la figura 3.4 que pasan por el punto O, se cuenta el número de pasos de A a O (que son $\binom{5}{3} = 20$ en número) y el número de caminos que hay de O a B (que son $\binom{4}{3} = 4$ en número). El número total de caminos lo es pues $\binom{5}{3}\binom{4}{3} = (20)(4) = 80$.

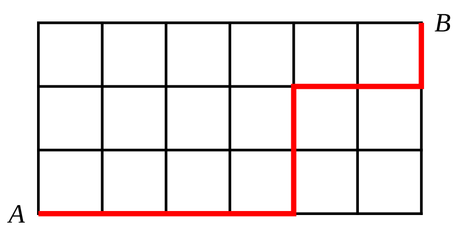


Figure 3.3: Example 231.

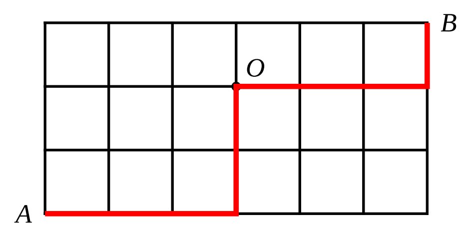


Figure 3.4: Example 232.

3.2.4 Combinaciones con repetición

233 Teorema (De Moivre) Sea n un entero positivo. El número de soluciones enteras positivas de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

es

$$\binom{n-1}{r-1}.$$

Demostración: *Escríbase n como*

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 + 1,$$

en donde hay n 1's y $n-1$ +'s. Para descomponer a n en r sumandos sólo se necesita escoger $r-1$ +'s del total de $n-1$, lo cual demuestra el teorema. ❑

234 Ejemplo ¿En cuántas maneras se puede escribir 9 como la suma de tres enteros estrictamente positivos? Aquí $1+7+1$ se tomará como diferente de $7+1+1$.

►**Resolución:** *Este es el ejemplo 217. Se buscan soluciones íntegras de*

$$a + b + c = 9, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Por el teorema 233 esto es

$$\binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28.$$

◄

235 Ejemplo ¿En cuántas maneras se puede escribir 100 como la suma de cuatro enteros estrictamente positivos?

►**Resolución:** *Se buscan soluciones íntegras de*

$$a + b + c + d = 100,$$

que gracias al teorema 233 son en total

$$\binom{99}{3} = 156849.$$

◄

236 Corolario Sea n un entero positivo. El número de soluciones enteras no negativas de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n$$

es

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

Demostración: *Póngase $x_r - 1 = y_r$. Entonces $x_r \geq 1$. La ecuación*

$$x_1 - 1 + x_2 - 1 + \cdots + x_r - 1 = n$$

es equivalente a

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n + r,$$

que por el teorema 233, tiene

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

soluciones. ❑

237 Ejemplo Hállese el número de cuartetos (a,b,c,d) de enteros que satisfagan

$$a+b+c+d=100,\ a\geq 30, b>21, c\geq 1, d\geq 1.$$

►**Resolución:** *Póngase $a'+29=a, b'+20=b$. Entonces se desea el número de soluciones enteras estrictamente positivas de*

$$a'+29+b'+21+c+d=100,$$

o sea, de

$$a'+b'+c+d=50.$$

Por el teorema 233 este número es

$$\binom{49}{3}=18424.$$

◄

238 Ejemplo ¿En cuántas maneras se puede escribir 1024 como el producto de tres enteros positivos?

►**Resolución:** *Véase que $1024=2^{10}$. Se necesita una descomposición de la forma $2^{10}=2^a2^b2^c$, esto es , se necesitan soluciones íntegras de*

$$a+b+c=10,\quad a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0.$$

Por el teorema 236 éstas son $\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$ *en número.* ◄

3.3 Principio de inclusión-exclusión

La regla de la adición 184 da la cardinalidad de la reunión de conjuntos disjuntos. En esta sección se mostrará como deducir la cardinalidad de la reunión de conjuntos no necesariamente disjuntos.

El principio de inclusión-exclusión es atribuído tanto a Sylvester como a Poincaré.

239 Teorema (Inclusión-exclusión para dos conjuntos)

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)$$

Demostración: *En el diagrama de Venn 3.5, sea R_1 el número de elementos simultáneamente en ambos conjuntos (i.e., en $A\cap B$), sea R_2 el número de elementos en A pero no en B (i.e., en $A\setminus B$) y por R_3 el número de elementos en B pero no en A (i.e., en $B\setminus A$). Se tiene $R_1+R_2+R_3=\operatorname{card}(A\cup B)$, lo cual demuestra el teorema.* ❑

240 Ejemplo De 40 personas, 28 fuman y 16 mascan tabaco. Además, se sabe que 10 tanto fuman como mascan tabaco. ¿Cuántas personas ni fuman ni mascan tabaco?

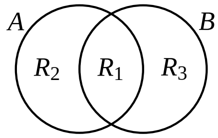


Figure 3.5: Inclusión-exclusión para dos conjuntos.

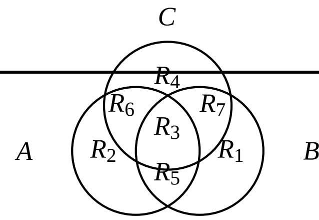


Figure 3.6: Inclusión-exclusión para tres conjuntos.

►**Resolución:** *Si X es un conjunto finito, denotaremos por $\operatorname{card}(X)$ su cardinalidad, esto es, el número de elementos que hay en el conjunto. Sea A el conjunto de personas que fuman y B el conjunto de personas que mascan tabaco. Como $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A\cap B) = 28+16-10 = 34$, hay 34 personas o que fuman o que mascan tabaco. Por lo tanto, el número de personas que ni fuma ni masca tabaco es $40-34=6$.* ◄

241 Ejemplo Cuatrocientos niños forman un círculo y los numeramos $1,2,\ldots,400$. Sea $k, 1\leq k\leq 400$ un entero fijo. Marcamos cada k niños deteniéndonos cuando marcamos a un niño por segunda vez. Por ejemplo, si $k=6$, comenzamos marcando los ninõs $6,12,18,\ldots,396$. Luego nos toca marcar al niño 2, pues el sexto luego 396 es el 2. Seguimos marcando a los niños $8,14,20,\ldots,398$. Nos toca ahora marcar a los niños $4,10,16,\ldots,400$. El próximo niño a marcar es el sexto, que lo marcamos pues por segunda vez. Notamos que dejamos sin marcar a los niños $1,3,5,7,9,11,\ldots 399$—esto es, los enteros de la forma $6k\pm 1, 6k+3$ entre 1 y 400. ¿Para cuántos valores de k serán marcados todos los niños al menos una vez?

►**Resolución:** *Vemos que si k tiene un factor mayor que 1 en común con 400, entonces no marcamos a todos los niños. Así pues, las k's requeridas son aquellas k's entre 1 y 400 inclusive que son relativamente primas a 400. Ahora bien, $400 = 2^4 5^2$. Para contar las k's que no tienen factores primos en común con 400, contaremos las que sí tienen factores en común con 400 y las restaremos a 400. Sea A el conjunto los múltiplos de 2 en $\{1,2,3,\ldots,400\}$ y B el conjunto de múltiplos de 5 en $\{1,2,3,\ldots,400\}$. Por inclusión- exclusión $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A\cap B)$. Ahora bien,*

$$\operatorname{card}(A) = \left[\frac{400}{2}\right] = 200,\ \operatorname{card}(B) = \left[\frac{400}{5}\right] = 80,\ \operatorname{card}(A\cap B) = \left[\frac{400}{10}\right] = 40.$$

Luego $\operatorname{card}(A\cup B) = 240$ enteros en $\{1,2,\ldots 400\}$ no son relativamente primos a 400 y $400-240 = 160$ lo son. Así pues, sólo 160 k's provocan que todos los niños sean marcados. ◄

Sea $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$, donde las p's son primos distintos. Si $\phi(n)$ denota el número de enteros $k,\ 1\leq k\leq n$ relativamente primos a n, entonces por inclusión-exclusión se puede demostrar que

$$\phi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1})\cdots(p_s^{a_s} - p_s^{a_s-1}).$$

242 Teorema (Inclusión-exclusión en tres conjuntos)

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C)\\ &\quad -\operatorname{card}(A\cap B) - \operatorname{card}(B\cap C) - \operatorname{card}(C\cap A)\\ &\quad +\operatorname{card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Demostración: *Combinando la propiedad asociativa y distributiva,*

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{card}(A\cup(B\cup C))\\
&= \operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B\cup C)-\operatorname{card}(A\cap(B\cup C))\\
&= \operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B\cup C)-\operatorname{card}((A\cap B)\cup(A\cap C))\\
&= \operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)-\operatorname{card}(B\cap C)\\
&\quad -\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(A\cap C)\\
&\quad +\operatorname{card}((A\cap B)\cap(A\cap C))\\
&= \operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)-\operatorname{card}(B\cap C)\\
&\quad -(\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card}(A\cap C)-\operatorname{card}(A\cap B\cap C))\\
&= \operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)\\
&\qquad -\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(B\cap C)-\operatorname{card}(C\cap A)\\
&\qquad +\operatorname{card}(A\cap B\cap C).
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. Véase también la figura 3.6. ❑

243 Ejemplo De 200 políticos entrevistados en la legislatura, 75 usan cocaína, 85 usan heroína y 100 utilizan barbitúricos. Entre los 200, 30 usan cocaína y heroína, 50 usan heroína y barbitúricos y 40 utilizan cocaína y barbitúricos. Finalmente, 10 indulgen en el uso de las tres substancias. ¿Cuántos de estos 200 políticos no usan drogas?

►**Resolución:** *Sean* A,B,C *el conjunto de políticos entre los 200 que utilizan cocaína, heroína y barbitúricos, respectivamente. Se nos es dado que* $\operatorname{card}(A)=75, \operatorname{card}(B)=85, \operatorname{card}(C)=100, \operatorname{card}(A\cap B)=30, \operatorname{card}(B\cap C)=50, \operatorname{card}(C\cap A)=40, \operatorname{card}(A\cap B\cap C)=10$. *Por el principio de inclusión-exclusión*

$$\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=75+85+100-30-50-40+10=150$$

políticos utilizan al menos una droga. Luego, $200-150=50$ *no utilizan ninguna droga.* ◄

244 Ejemplo ¿Cuántos números entre 1 y 600 inclusive no son divisibles ni por 3, ni por 5, ni por 7?

►**Resolución:** *Denótese por* A_k *aquellos enteros en el intervalo* $[1;600]$ *que son divisibles por* $k=3,5,7$. *En-*

tonces

$$\begin{array}{rclcl} \text{card}(A_3) & = & \lfloor\frac{600}{3}\rfloor & = & 200, \\ \text{card}(A_5) & = & \lfloor\frac{600}{5}\rfloor & = & 120, \\ \text{card}(A_7) & = & \lfloor\frac{600}{7}\rfloor & = & 85, \\ \text{card}(A_{15}) & = & \lfloor\frac{600}{15}\rfloor & = & 40 \\ \text{card}(A_{21}) & = & \lfloor\frac{600}{21}\rfloor & = & 28 \\ \text{card}(A_{35}) & = & \lfloor\frac{600}{35}\rfloor & = & 17 \\ \text{card}(A_{105}) & = & \lfloor\frac{600}{105}\rfloor & = & 5 \end{array}$$

Por inclusión-exclusión hay $200+120+85-40-28-17+5=325$ *enteros en* $[1;600]$ *divisibles por al menos uno de los enteros en* $\{3,5,7\}$. *Los no divisibles por los enteros en* $\{3,57\}$ *son* $600-325=275$ *en total.* ◄

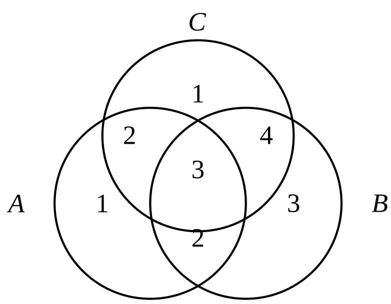


Figure 3.7: Ejemplo 245.

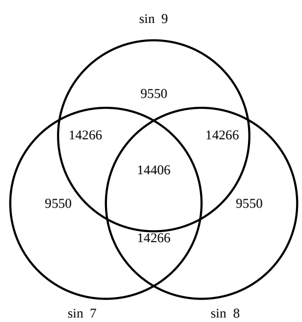


Figure 3.8: Ejemplo 246.

245 Ejemplo En un grupo de 30 personas , 8 hablan inglés , 12 hablan castellano y 10 hablan francés. Se sabe que 5 hablan inglés y castellano , 5 castellano y francés, y 7 inglés y francés. Tres personas hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas no hablan ninguno de estos idiomas?

►**Resolución:** *Sea A el conjunto de los anglófonos, B el conjunto de los hispanófonos y C el conjunto de los francófonos. Llenamos sucesivamente los diagramas de Venn en la figura 3.7. En la intersección de los tres ponemos* 8. *En la región común de A y B que no ha sido llenada ponemos* $5-2=3$. *En la región común entre A y C que no ha sido llenada ponemos* $5-3=2$. *En la región común de B y C que no ha sido llenada ponemos* $7-3=4$. *En la parte restante de A ponemos* $8-2-3-2=1$, *en la parte restante de B ponemos* $12-4-3-2=3$, *y en la parte restante de C ponemos* $10-2-3-4=1$. *Las regiones disjuntas cuentan* $1+2+3+4+1+2+3=16$ *personas. Fuera de estos tres círculos hay* $30-16=14$. ◄

246 Ejemplo Considérese el conjunto de enteros naturales de cinco dígitos escritos en notación decimal.

1. ¿Cuántos hay?
2. ¿Cuántos no tienen un 9 en su expansión decimal?
3. ¿Cuántos tienen al menos un 9 en su expansión decimal?
4. ¿Cuántos tienen exactamente un 9?
5. ¿Cuántos tienen exactamente dos 9's?
6. ¿Cuántos tienen exactamente tres 9's?
7. ¿Cuántos tienen exactamente cuatro 9's?
8. ¿Cuántos tienen exactamente cinco 9's?
9. ¿Cuántos no tienen ni un 8 ni un 9 en su expansión decimal?
10. ¿Cuántos no tienen ni un 7, ni un 8, ni un 9 en su expansión decimal?
11. ¿Cuántos tienen o bien un 7, o un 8, o un 9 en su expansión decimal?

►**Resolución:**

1. *Hay* 9 *selecciones posibles para el primer dígito y* 10 *selecciones posibles para los dígitos restantes. El número de selecciones es así* $9\cdot 10^4 = 90000$.
2. *Hay* 8 *selecciones posibles para el primer dígito y* 9 *selecciones posibles para los dígitos restantes. El número de selecciones es así* $8\cdot 9^4 = 52488$.
3. *Esto es la diferencia* $90000-52488 = 37512$.
4. *Se condiciona en el primer dígito. Si el primer dígito es un* 9 *entonces los otros cuatro dígitos restantes deberán de ser distintos de* 9*, lo que da* $9^4 = 6561$ *números. Si el primer dígito no es un* 9*, entonces hay* 8 *selecciones para este primer dígito. Además hay* $\binom{4}{1} = 4$ *maneras de seleccionar donde el* 9 *estará, y hay* 9^3 *maneras de llenar los* 3 *espacios restantes. En este caso hay* $8\cdot 4\cdot 9^3 = 23328$ *tales números. En total hay* $6561+23328 = 29889$ *enteros de cinco dígitos con exactamente un* 9 *en expansión decimal.*
5. *Se condiciona en el primer dígito. Si el primer dígito es un* 9 *uno de los cuatro restantes será un* 9*, y selección de posición se puede lograr en* $\binom{4}{1} = 4$ *maneras. Los otros tres dígitos restantes deberán de ser distintos de* 9*, lo que da* $4\cdot 9^3 = 2916$ *tales números. Si el primer dígito no es un* 9*, entonces hay* 8 *selecciones para este primer dígito. Además hay* $\binom{4}{2} = 6$ *maneras de seleccionar donde los otros dos* 9*'s estarán, y hay* 9^2 *maneras de llenar los dos espacios restantes. En este caso hay* $8\cdot 6\cdot 9^2 = 3888$ *tales números. En total hay* $2916+3888 = 6804$ *enteros de cinco dígitos con exactamente dos* 9*'s en su expansión decimal.*
6. *De nuevo, condicionamos en el primer dígito. Si el primer dígito es un* 9 *entonces dos de los restantes cuatro serán* 9*'s, y la selección de posición se puede lograr en* $\binom{4}{2} = 6$ *maneras. Los otros dos dígitos restantes deberán de ser distintos de* 9*, lo que da* $6\cdot 9^2 = 486$ *tales números. Si el primer dígito no es un* 9*, entonces hay* 8 *selecciones para este primer dígito. Además hay* $\binom{4}{3} = 4$ *maneras de seleccionar donde los tres* 9*'s estarán, y se tiene* 9 *maneras de llenar los espacios restantes. En este caso hay* $8\cdot 4\cdot 9 = 288$ *tales números. En total hay* $486+288 = 774$ *enteros de cinco dígitos con exactamente tres* 9*'s en expansión decimal.*
7. *Si el primer dígito es un* 9 *entonces tres de los restantes cuatro serán* 9*'s, y la selección de posición se puede lograr en* $\binom{4}{3} = 4$ *maneras. Los otros restantes dígitos deberán de ser distintos de* 9*, lo que da* $4\cdot 9 = 36$ *tales números. Si el primer dígito no es un* 9*, entonces hay* 8 *selecciones para este primer dígito. Además hay* $\binom{4}{4} = 4$ *maneras de seleccionar donde los cuatro* 9*'s estarán, así llenando todos estos espacios. En este caso hay* $8\cdot 1 = 8$ *tales números. En total hay* $36+8 = 44$ *enteros de cinco dígitos con exactamente tres* 9*'s en expansión decimal.*
8. *Obviamente existe solamente* 1 *entero tal.*

   ☞ *Obsérvese que* $37512 = 29889+6804+774+44+1$.
9. *Hay* 7 *selecciones para el primer dígito y* 8 *selecciones para los restantes* 4 *dígitos, lo que da* $7\cdot 8^4 = 28672$ *tales enteros.*
10. *Hay* 6 *selecciones para el primer dígito y* 7 *selecciones para los restantes* 4 *dígitos, lo que da* $6\cdot 7^4 = 14406$ *tales enteros.*
11. *Se utiliza inclusión-exclusión. De la figura 3.8, los números dentro de los círculos suma a* 85854*. Luego el número deseado es* $90000-85854 = 4146$.

◄

247 Ejemplo

¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$a+b+c+d = 100,$$

que satisfacen las siguientes restricciones:

$$1 \le a \le 10,\ b \ge 0,\ c \ge 2, 20 \le d \le 30?$$

►**Resolución:** *Se utiliza inclusión-exclusión. Hay* $\binom{80}{3} = 82160$ *soluciones íntegras*

$$a+b+c+d = 100,\ \ a \ge 1, b \ge 0, c \ge 2, d \ge 20.$$

Sea A el conjunto de soluciones

$$a \ge 11, b \ge 0, c \ge 2, d \ge 20$$

y B el conjunto de soluciones

$$a \geq 1, b \geq 0, c \geq 2, d \geq 31.$$

Entonces $\operatorname{card}(A) = \binom{70}{3}$, $\operatorname{card}(B) = \binom{69}{3}$, $\operatorname{card}(A \cap B) = \binom{59}{3}$ *y así*

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \binom{70}{3} + \binom{69}{3} - \binom{59}{3} = 74625.$$

El número total de soluciones

$$a + b + c + d = 100$$

con

$$1 \leq a \leq 10,\ b \geq 0,\ c \geq 2, 20 \leq d \leq 30$$

es así

$$\binom{80}{3} - \binom{70}{3} - \binom{69}{3} + \binom{59}{3} = 7535.$$

◀

Tarea

248 Problema ¿De cuántas maneras diferentes puede un estudiante adivinar un examen completo de verdadero/falso que tenga dieciocho preguntas?

249 Problema En contando el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos, demuestre que

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Chapter 4

Sumas y recurrencias

4.1 Progresiones aritméticas

Consideremos el siguiente problema.

250 Ejemplo Si la sucesión de términos $6, 10, 14, 18, 22, \ldots$ sigue la misma ley de formación, hallar los términos 10^{mo}, 50^{avo}, 100^{avo}. ¿Puede hallar el n-ésimo término?

►**Resolución:** *Observemos que cada término se obtiene sumándole 4 al término anterior. Así:*

$$10 = 6+4, 14 = 10+4, 18 = 14+4, 22 = 18+4, \ldots$$

Pero aún podemos ir más lejos. Podemos expresar cada término en términos del primero. Luego

$$\begin{array}{lcll} 6 & = & 6+0\cdot 4 & \text{primer término} \\ 10 & = & 6+1\cdot 4 & \text{segundo término} \\ 14 & = & 6+2\cdot 4 & \text{tercer término} \\ 18 & = & 6+3\cdot 4 & \text{cuarto término} \\ 22 & = & 6+4\cdot 4 & \text{quinto término.} \end{array}$$

Si el patrón de formación es respetado para los términos subsiguientes entonces deberíamos tener: décimo término $= 6+9\cdot 4 = 42$, *cincuentavo término* $= 6+49\cdot 4 = 202$ *y cienavo término* $= 6+99\cdot 4 = 402$. *De igual manera deducimos que el enésimo término es* $= 6+4(n-1)$. ◄

Una progresión como la del ejemplo previo, en donde la diferencia de términos consecutivos es constante se llama *progresión aritmética.* Así

$$-18, -12, -6, 0, 6, 12, \ldots$$

es una progresión aritmética de *diferencia común* 6, mientras que $1, 3, 7, 97, \ldots$ no lo es, ya que términos sucesivos no guardan diferencia constante.

En general, si comenzamos con un número arbitrario, digamos a y si guardamos una diferencia común de d, entonces obtenemos la progresión aritmética $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$, con término en la posición n igual a $a+(n-1)d$.

251 Ejemplo Hallar el 35^{avo} término de una progresión aritmética cuyo 27^{avo} término es 186 y cuyo 45^{avo} término es 312.

►**Resolución:** *Tratemos de expresar la data que sabemos en términos del primer término y la diferencia común. Como no se nos da el primer término, llamémosle* a *y a la diferencia común llamémosla* d. *Así el primer término es* a, *el segundo* $a+d$, *el tercero* $a+d+d=a+2d$, *el cuarto* $a+2d+d=a+3d$, *etc. Así el* 27^{avo} *término debe ser* $a+26d$ *y el* 45^{avo} *término debe ser* $a+44d$. *Pero la data del problema estipula que* $a+26d=186$ *y* $a+44d=312$. *De aquí* $(a+44d)-(a+26d)=312-186=126$, *i.e.,* $18d=126$ *o* $d=7$. *Pero entonces* $186=a+26d=a+26\cdot 7=a+182$, *de donde* $a=4$. *Finalmente el* 35^{avo} *término, o sea,* $a+34d$ *está dado por* $a+34d=4+34(7)=242$. ◄

Veremos ahora como sumar progresiones aritméticas.

252 Ejemplo Sumar la progresión aritmética

$$7+15+23+\cdots+807.$$

►**Resolución:** *Vemos que los términos están en progresión aritmética:* $7,7+8\cdot 1,7+8\cdot 2,\ldots,7+8\cdot 100$. *Observe que si* $S=7+15+23+\cdots+807$, *entonces también* $S=807+799+791+\cdots+7$. *Así:* $2S=(7+807)+(15+799)+(23+791)+\cdots+(807+7)=101\cdot 814=82214$. *Finalmente,* $S=41107$. ◄

253 Ejemplo Sumar $5/2,1,-1/2,\ldots$ hasta 19 términos.

►**Resolución:** *La diferencia común es* $-3/2$. *Luego el primer término es* $5/2=5/2+0(-3/2)$, *el segundo* $1=5/2+1(-3/2)$, *el tercero* $-1/2=5/2+2(-3/2),\ldots$, *el diecinueveavo término* $5/2+18(-3/2)=-49/2$. *Así, la suma que queremos es*

$$S=5/2+1-1/2-\cdots-49/2.$$

Operando como en los ejemplos anteriores,

$$\begin{aligned} 2S &= (5/2-49/2)+(1-46/2)+(-1/2-43/2)+\cdots+(-49/2+5/2) \\ &= -44/2-44/2-44/2-\cdots-44/2 \\ &= 19(-44/2) \\ &= -418. \end{aligned}$$

Colegimos luego que $S=-209$. ◄

La siguiente fórmula ocurre con regularidad y el lector hará bien en aprender a deducirla. Si

$$A_n=1+2+3+\cdots+n$$

entonces también

$$A_n=n+(n-1)+\cdots+1.$$

Sumando estas dos cantidades,

$$\begin{array}{rcccccccc} A_n & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n \\ A_n & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 1 \\ 2A_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) \\ & = & n(n+1), & & & & & & \end{array}$$

puesto que hay n sumandos. De esto colegimos

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.1}$$

254 Ejemplo Hallar el valor de la suma

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+99-100.$$

►**Resolución:** *Observe que* $-1=1-2=3-4=\cdots=99-100$. *Luego agrupando la suma en cincuenta pares que suman* -1, *tenemos*

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+99-100=-50.$$

◄

255 Ejemplo Hallar la suma

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots+99^2-100^2.$$

►**Resolución:** *Como* $x^2-(x+1)^2=-2x-1$, *tenemos*

$$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(99^2-100^2)=-(3+7+11+\cdots+199)=-5050.$$

◄

Tarea

256 Problema Hallar los términos 14 y 110 de la progresión $43,42,41,\ldots$.

257 Problema Hallar los términos 20 y 310 de la progresión $-43,-40,-37,\ldots$.

258 Problema Hallar los términos 12 y 1090 de la progresión $0.6,1.2,1.8,\ldots$.

259 Problema Hallar los términos 13 y 150 de la progresión $a-2d,a-d,a,\ldots$.

260 Problema Hallar los términos 10 y 51 de la progresión $x-y,x+y,x+3y,\ldots$.

261 Problema Sumar $64,96,128,\ldots$ hasta cuarenta términos.

262 Problema Sumar $1/2,1/2-x,1/2-2x,\ldots$ hasta treinta términos.

263 Problema Sumar $x-y,x+y,x+3y,\ldots$ hasta diez términos.

264 Problema Hallar el término 15 de una progresión aritmética cuyo término 14 es 9 y cuyo término 16 es -90.

265 Problema Hallar el término 22 de una progresión aritmética cuyo término 11 es -1 y cuyo término 16 es 55.

266 Problema Hallar el número de términos y la diferencia común de una serie aritmética cuya suma es 30, cuyo primer término es -9 y cuyo último término es 14.

267 Problema Sumar
$$1+2+3+\cdots+100.$$

268 Problema Demostrar que
$$1+2+3+\cdots+(n^2-1)+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

269 Problema Demostrar que
$$1+3+5+\cdots+2n-1=n^2.$$

270 Problema (AHSME 1994) Sumar la serie
$$20+20\frac{1}{5}+20\frac{2}{5}+\cdots+40.$$

271 Problema (AIME 1984) Hallar el valor de $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{98}$ si $a_1,a_2,a_3,\ldots$ es una progresión aritmética con diferencia común 1 y con $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{98}=137$.

272 Problema Demostrar que
$$\frac{1}{1996}+\frac{2}{1996}+\frac{3}{1996}+\cdots+\frac{1995}{1996}$$
es un entero.

273 Problema (AHSME 1991) Sea $T_n=1+2+3+\cdots+n$ y
$$P_n=\frac{T_2}{T_2-1}\cdot\frac{T_3}{T_3-1}\cdot\frac{T_4}{T_4-1}\cdots\frac{T_n}{T_n-1}.$$
Hallar P_{1991}.

274 Problema Considere la tabla:
$$\begin{gathered}1=1\\2+3+4=1+8\\5+6+7+8+9=8+27\\10+11+12+13+14+15+16=27+64\end{gathered}$$
Descubra el patrón de formación, conjeture una ley general y demuéstrela.

275 Problema Los enteros naturales impares se agrupan en paréntesis de la siguiente manera:
$$\begin{gathered}(1)\\(3,5)\\(7,9,11)\\(13,15,17,19)\\(21,23,25,27,29)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$
Halle la suma del sexto, séptimo, y octavo grupos. Conjeture y demuestre una fórmula para la suma del enésimo paréntesis.

4.2 Progresiones geométricas

Consideremos ahora la progresión $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$. Notamos que cada término es el triple del anterior. Una progresión de este tipo se llama *progresión geométrica*. Decimos que 3 es la *razón común* de esta progresión geométrica. Vemos que el primer término está dado por $2(3)^0$, el segundo por $2(3)^1$, el tercero por $2(3)^2$, el cuarto por $2(3)^3$, el quinto por $2(3)^4$, etc. Así pues, el cincuentavo término está dado por $2(3)^{49}$, el 100-avo es $2(3)^{99}$ y el enésimo término está dado por $2(3)^{n-1}$.

276 Ejemplo Hallar el décimo término de la progresión geométrica

$$1/2, -1, 2, \ldots.$$

►**Resolución:** *Vemos que la razón común es* -2. *Luego el primer término está dado por* $\frac{1}{2}(-2)^0$, *el segundo está dado por* $\frac{1}{2}(-2)^1$, *el tercero por* $\frac{1}{2}(-2)^2$, *el cuarto por* $\frac{1}{2}(-2)^3$, *etc. El patrón indica pues que el décimo término está dado por* $\frac{1}{2}(-2)^9$. ◄

En general si una progresión geométrica tiene primer término a y razón común r, entonces va de la siguiente manera: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ y el enésimo término está dado por ar^{n-1}.

277 Ejemplo Hallar el segundo término de una progresión geométrica con cuarto término 24 y séptimo término 192.

►**Resolución:** *No conocemos el primer término, llamémosle* a. *Tampoco conocemos la razón común, llamémosle* r. *Luego el primer término está dado por* a, *el segundo por* ar, *el tercero por* ar^2, *el cuarto por* ar^3 *y siguiendo el patrón, el séptimo término es* ar^6. *La data es que* $24 = ar^3$ *y* $192 = ar^6$. *De aquí tenemos*

$$r^3 = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{192}{24} = 8,$$

de donde $r = 2$. *Luego* $a(2)^3 = 24$ *y así* $a = 3$. *Luego el segundo término está dado por* $ar = 6$. ◄

278 Ejemplo Hallar la suma de la serie geométrica

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 1024.$$

►**Resolución:** *Pongamos*

$$S = 1 + 2 + 4 + \cdots + 1024.$$

Entonces

$$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 + 2048.$$

Así

$$S = 2S - S = (2 + 4 + 8 \cdots + 2048) - (1 + 2 + 4 + \cdots + 1024) = 2048 - 1 = 2047.$$

◄

279 Ejemplo Hallar la suma de la serie geométrica

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}.$$

►**Resolución:** *Tenemos*

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= x-\frac{1}{3}x \\ &= (\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{99}}) \\ &\qquad -(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{99}}+\frac{1}{3^{100}}) \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3^{100}}.\end{aligned}$$

De esto colegimos

$$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{99}}.$$

◄

280 Ejemplo Sumar

$$a=1+2\cdot 4+3\cdot 4^2+\cdots+10\cdot 4^9.$$

►**Resolución:** *Tenemos*

$$4a=4+2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\cdots+9\cdot 4^9+10\cdot 4^{10}.$$

Luego $4a-a$ *nos da*

$$3a=-1-4-4^2-4^3-\cdots-4^9+10\cdot 4^{10}.$$

Al sumar esta última serie geométrica,

$$a=\frac{10\cdot 4^{10}}{3}-\frac{4^{10}-1}{9}.$$

◄

281 Ejemplo Hallar la suma

$$S_n=1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n.$$

Interpretar el resultado cuando n crece indefinidamente.

►**Resolución:** *Tenemos*

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=(1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n)-(1/2+1/4+\cdots+1/2^n+1/2^{n+1})=1-1/2^n.$$

Así

$$S_n=2-1/2^n.$$

Calculamos ahora los siguientes valores:

$$\begin{aligned}S_1 &= 2-1/2^0 &&= 1 \\ S_2 &= 2-1/2 &&= 1.5 \\ S_3 &= 2-1/2^2 &&= 1.875 \\ S_4 &= 2-1/2^3 &&= 1.875 \\ S_5 &= 2-1/2^4 &&= 1.9375 \\ S_6 &= 2-1/2^5 &&= 1.96875 \\ S_{10} &= 2-1/2^9 &&= 1.998046875\end{aligned}$$

Vemos que a medida que tomamos más términos de la serie, nos acercamos cada vez más a 2. ◀

Supongamos que los procedimientos que utilizamos para sumar series geométricas finitas son válidos para las infinitas. Entonces podremos decir que

$$S_\infty = 1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots$$

hasta infinitos suma a 2, ya que

$$S_\infty - \frac{1}{2}S_\infty = (1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + \cdots) - (1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \cdots)) = 1$$

puesto que los términos luego del primero encuentran su opuesto en la serie de la derecha.

La manipulación formal que utilizamos supra debe manejarse con sumo cuidado. Por ejemplo,

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

es obviamente infinitamente grande, pues cada término es mayor que 1 y esto incrementa el valor de la serie cada vez más. Sin embargo, al operar formalmente como lo hicimos anteriormente obtenemos

$$S = 2S - S = (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots) - (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots) = -2,$$

i.e., la suma de números positivos da un resultado negativo, lo cual es un disparate mayúsculo.

¿Qué sucede entonces? Entra ahora pues el concepto de *convergencia*. Diremos que la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

converge hacia un valor finito S si cada suma parcial

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

se acerca más y más a S a medida que n aumenta. Como vimos en los ejemplos anteriores, esto sucederá cuando $|r| < 1$. Si las sumas parciales no se acercan a un valor finito definitivo cuando n aumenta, entonces decimos que la serie geométrica *diverge*. Del ejemplo anterior se vislumbra que esto sucede cuando $|r| \geq 1$.

La teoría de series geométricas convergentes puede utilizarse para convertir un decimal periódico a una fracción.

282 Ejemplo Hallar la fracción que representa

$$x = 0.122222222222222\ldots$$

►**Resolución:** *Observemos que*

$$x = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots.$$

Pero

$$S = \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}.$$

Así

$$0.1222222222\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{11}{90}.$$

◀

283 Ejemplo Hallar la fracción que representa

$$x = 1.304040404040\ldots.$$

►**Resolución:** *Tenemos*

$$x = 1 + \frac{30}{10^2} + \frac{40}{10^4} + \frac{40}{10^6} + \frac{40}{10^8} + \cdots.$$

Ahora bien, la serie geométrica infinita

$$S = \frac{40}{10^4} + \frac{40}{10^6} + \frac{40}{10^8} + \cdots$$

suma a

$$S = \frac{40}{9900} = \frac{2}{495}.$$

Así

$$x = 1 + \frac{30}{10^2} + \frac{2}{495} = \frac{1291}{990}.$$

◀

284 Ejemplo Una mosca está en el origen $(0,0)$ y viaja sobre el plano una pulgada hacia el este, $1/2$ pulgada hacia el norte, $1/4$ de pulgada hacia el oeste, $1/8$ de pulgada hacia el sur, $1/16$ de pulgada hacia el este, etc. Si la mosca hiciese esto *ad infinitum*, ¿donde terminaría?

►**Resolución:** *Sea (X,Y) el punto donde la mosca terminaría. Vemos que*

$$X = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots = \frac{4}{5}$$

y

$$Y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} - \frac{1}{128} + \cdots = \frac{2}{5}.$$

Luego la mosca termina en el punto $(4/5, 2/5)$. ◀

Tarea

285 Problema Hallar los términos $13, 22$ y enésimo de la progresión geométrica

$$3/2, -3/8, 3/32, \ldots$$

286 Problema Si el término 15 de una progresión geométrica es -100 y el término 20 es 125, hallar el segundo término.

287 Problema Hallar la suma de las siguientes series geométricas:

1. $$1/2 - 1/4 + 1/8 - \cdots + 1/512 - 1/1024.$$

2. $$6 + 18 + 54 + \ldots$$

   hasta 20 términos.

3. $$1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots$$

   hasta 10 términos.

288 Problema Hallar la suma de la serie

$$3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4^3 + \cdots + 99 \cdot 4^{48}.$$

289 Problema

1. ¿Qué valor tendrá

   $$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$$

   hasta infinito?

2. ¿Qué valor tendrá

   $$1/10 + 1/10 + 1/100 + \cdots$$

   hasta infinito?

3. ¿Qué valor tendrá

   $$9/10 + 9/100 + 9/1000 + \cdots$$

   hasta infinito? Discuta por qué

   $$1 = 0.99999999999999999999\ldots$$

4. ¿Qué valor tendrá

   $$1 + 1 + 1 + \cdots$$

   hasta infinito? Discuta.

5. ¿Qué valor tendrá

   $$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

   hasta infinito?

290 Problema Hallar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

291 Problema Hallar todos los números complejos x, y tales que $x, x+2y, 2x+y$ formen una progresión aritmética a la vez que $(y+1)^2, xy+5, (x+1)^2$ formen una progresión geométrica.

292 Problema Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión geométrica. Halle las tangentes de los ángulos agudos.

293 Problema Sean a, b las raíces de la ecuación $x^2-3x+A=0$ y sean c, d las raíces de la ecuación $x^2-12x+B=0$. Se sabe que a, b, c, d forman, en este orden, una progresión geométrica creciente. Halle A y B.

294 Problema Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una progresión geométrica. Si

$$s = a_1+a_2+\cdots+a_n; \quad T = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

hallar su producto $P = a_1a_2\cdots a_n$ en términos de s y T.

4.3 Cancelación telescópica

A veces podemos sumar una serie

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

si podemos encontrar una sucesión $\{v_k\}$ con $a_k = v_k - v_{k-1}$. Entonces

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = v_1-v_0+v_2-v_1+\cdots+v_{n-1}-v_{n-2}+v_n-v_{n-1} = v_n-v_0.$$

Si tal sucesión $\{v_k\}$ existe, diremos entonces que la serie $a_1+a_2+\cdots+a_n$ es una *serie teléscopica*.

295 Ejemplo Simplificar

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right).$$

►**Resolución:** *Sumando cada fracción tenemos:*

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{100}{99},$$

lo que simplifica a $100/2 = 50$. ◄

296 Ejemplo Dado que

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{511} 512)$$

es un entero, hállelo.

►**Resolución:** *Poniendo todo en una base común, digamos* $a>0, a\neq 1$*:*

$$(\log_2 3)\cdot(\log_3 4)\cdot(\log_4 5)\cdots(\log_{511} 512) = \frac{\log_a 3}{\log_a 2}\cdot\frac{\log_a 4}{\log_a 3}\cdot\frac{\log_a 5}{\log_a 4}\cdots\frac{\log_a 512}{\log_a 511} = \frac{\log_a 512}{\log_a 2}.$$

Pero

$$\frac{\log_a 512}{\log_a 2} = \log_2 512 = \log_2 2^9 = 9,$$

de donde obtenemos el resultado. ◄

297 Ejemplo Simplificar

$$(2+1)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right).$$

►**Resolución:** *Utilizando la identidad* $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ *y llamando* P *al producto:*

$$\begin{aligned}
(2-1)P &= (2-1)(2+1)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^2-1\right)\cdot\left(2^2+1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^{2^2}-1\right)\cdot\left(2^{2^2}+1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&= \left(2^{2^3}-1\right)\cdot\left(2^{2^3}+1\right)\cdot\left(2^{2^4}+1\right)\cdots\left(2^{2^{99}}+1\right)\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&= (2^{2^{99}}-1)(2^{2^{99}}+1)\\
&= 2^{2^{100}}-1,
\end{aligned}$$

de donde

$$P=2^{2^{100}}-1.$$

◄

298 Ejemplo Simplificar

$$S=\log\tan 1^\circ+\log\tan 2^\circ+\log\tan 3^\circ+\cdots+\log\tan 89^\circ.$$

►**Resolución:** *Observe que* $(90-k)^\circ+k^\circ=90^\circ$. *Luego, sumando el término k-ésimo con el* $90-k$*-ésimo obtenemos que la suma dada es*

$$\begin{aligned}
S &= \log(\tan 1^\circ)(\tan 89^\circ)+\log(\tan 2^\circ)(\tan 88^\circ)\\
&\quad +\log(\tan 3^\circ)(\tan 87^\circ)+\cdots+\log(\tan 44^\circ)(\tan 46^\circ)+\log\tan 45^\circ.
\end{aligned}$$

Como $\tan k^\circ=1/\tan(90-k)^\circ$, *tenemos*

$$S=\log 1+\log 1+\cdots+\log 1+\log\tan 45^\circ.$$

Finalmente, como $\tan 45^\circ=1$, *colegimos*

$$S=\log 1+\log 1+\cdots+\log 1=0.$$

◄

299 Ejemplo Hallar el valor exacto del producto

$$P=\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}.$$

►**Resolución:** *Multiplicando a uno y otro lado por* $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$ *y haciendo uso de la identidad* $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}P &= (\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7})\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7})\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\\
&= \frac{1}{4}(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7})\\
&= \frac{1}{8}\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7} = -\operatorname{sen}\frac{8\pi}{7}$, *deducimos que*

$$P = -\frac{1}{8}.$$

◄

300 Ejemplo Demostrar que

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}.$$

►**Resolución:** *Pongamos*

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{10000}$$

y

$$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{10000}{10001}.$$

Es claro que $x^2 - 1 < x^2$ *para todo número real* x. *De esto deducimos*

$$\frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1}.$$

Por tanto

$$\begin{array}{ccc} 1/2 & < & 2/3 \\ 3/4 & < & 4/5 \\ 5/6 & < & 6/7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 9999/10000 & < & 10000/10001 \end{array}$$

Como todas estas desigualdades son de números positivos, podemos multiplicar una y otra columna para obtener

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{10000} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{10000}{10001},$$

o $A < B$. *Luego* $A^2 = A\cdot A < A\cdot B$. *Pero entrelazando los factores de* A *y* B,

$$A\cdot B = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{9999}{10000}\cdot\frac{10000}{10001} = \frac{1}{10001},$$

y por consiguiente, $A^2 < A\cdot B = 1/10001$. *De aquí* $A < 1/\sqrt{10001} < 1/100$. ◄

Para nuestro siguiente ejemplo necesitaremos la siguiente definición. El símbolo $n!$ (léase *n factorial*) significa

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

Por ejemplo $1! = 1, 2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6, 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Observe que $(k+1)! = (k+1)k!$. Tendremos por convención $0! = 1$.

301 Ejemplo Sumar

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + 99\cdot 99!.$$

►**Resolución:** *De* $(k+1)! = (k+1)k! = k\cdot k! + k!$ *deducimos* $(k+1)! - k! = k\cdot k!$. *Así*

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 1! & = & 2! - 1! \\ 2\cdot 2! & = & 3! - 2! \\ 3\cdot 3! & = & 4! - 3! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 98\cdot 98 & = & 99! - 98! \\ 99\cdot 99! & = & 100! - 99! \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \cdots + 99\cdot 99! = 100! - 1! = 100! - 1.$$

◄

302 Ejemplo Hallar una forma cerrada para la suma

$$A_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

►**Resolución:** *Observemos que*

$$k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1.$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} 1^2 - 0^2 & = & 2\cdot 1 - 1 \\ 2^2 - 1^2 & = & 2\cdot 2 - 1 \\ 3^2 - 2^2 & = & 2\cdot 3 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n^2 - (n-1)^2 & = & 2\cdot n - 1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$n^2 - 0^2 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n.$$

Resolviendo para la suma,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \cdot n^2/2 + n/2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

◄

303 Ejemplo Hallar la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

►**Resolución:** *Observemos que*

$$k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl} 1^3-0^3 & = & 3\cdot 1^2-3\cdot 1+1 \\ 2^3-1^3 & = & 3\cdot 2^2-3\cdot 2+1 \\ 3^3-2^3 & = & 3\cdot 3^2-3\cdot 3+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n^3-(n-1)^3 & = & 3\cdot n^2-3\cdot n+1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots+n)+n.$$

Pero por el ejercicio anterior se tiene

$$n^3-0^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-\frac{3}{2}\cdot n(n+1)+n.$$

Resolviendo para la suma,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot n(n+1)-\frac{n}{3}.$$

Simplificando obtenemos

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

◀

304 Ejemplo Sumar la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

►**Resolución:** *Observe que*

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{1\cdot 2} & = & \frac{1}{1}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\cdot 3} & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\cdot 4} & = & \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{99\cdot 100} & = & \frac{1}{99}-\frac{1}{100} \end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

◀

305 Ejemplo Sumar

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 34}.$$

►**Resolución:** *Observe que*

$$\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+4}.$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1\cdot 4} & = & \frac{1}{3}-\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4\cdot 7} & = & \frac{1}{12}-\frac{1}{21} \\ \frac{1}{7\cdot 10} & = & \frac{1}{21}-\frac{1}{30} \\ \frac{1}{10\cdot 13} & = & \frac{1}{30}-\frac{1}{39} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{34\cdot 37} & = & \frac{1}{102}-\frac{1}{111} \end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{31\cdot 34} = \frac{1}{3}-\frac{1}{111} = \frac{12}{37}.$$

◄

306 Ejemplo Sumar

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{25\cdot 28\cdot 31}.$$

►**Resolución:** *Observe que*

$$\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}.$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} & = & \frac{1}{6\cdot 1\cdot 4}-\frac{1}{6\cdot 4\cdot 7} \\ \frac{1}{4\cdot 7\cdot 10} & = & \frac{1}{6\cdot 4\cdot 7}-\frac{1}{6\cdot 7\cdot 10} \\ \frac{1}{7\cdot 10\cdot 13} & = & \frac{1}{6\cdot 7\cdot 10}-\frac{1}{6\cdot 10\cdot 13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{25\cdot 28\cdot 31} & = & \frac{1}{6\cdot 25\cdot 28}-\frac{1}{6\cdot 28\cdot 31} \end{array}$$

Sumando una y otra columna obtenemos

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{25\cdot 28\cdot 31} = \frac{1}{6\cdot 1\cdot 4}-\frac{1}{6\cdot 28\cdot 31} = \frac{9}{217}.$$

◄

307 Ejemplo Sumar

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+99\cdot 100.$$

►**Resolución:** *Observemos que*

$$k(k+1) = \frac{1}{3}(k)(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)(k)(k+1).$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} 1\cdot 2 & = & \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & = & \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4-\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & = & \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4\cdot 5-\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 99\cdot 100 & = & \frac{1}{3}\cdot 99\cdot 100\cdot 101-\frac{1}{3}\cdot 98\cdot 99\cdot 100 \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+99\cdot 100=\frac{1}{3}\cdot 99\cdot 100\cdot 101-\frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1\cdot 2=333300.$$

◀

Tarea

308 Problema Hallar una fórmula para

$$D_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n.$$

309 Problema Simplificar

$$\frac{(1+i)^{2004}}{(1-i)^{2000}}.$$

310 Problema Si

$$a+ib=1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+1995i^{1994}+1996i^{1995},$$

con a y b números reales, hallar a y b.

311 Problema Simplificar

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99^2}\right).$$

312 Problema Simplificar

$$\sum_{k=2}^{1023}\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

313 Problema Hallar el valor exacto de

$$\frac{1}{\log_2 1996!}+\frac{1}{\log_3 1996!}+\frac{1}{\log_4 1996!}+\cdots+\frac{1}{\log_{1996} 1996!}.$$

314 Problema (AHSME 1996) La sucesión

$$1,2,1,2,2,1,2,2,2,1,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,1,2,\ldots$$

consiste de 1's separados por bloques de 2's, con n bloques de 2's en el n-ésimo bloque. Hallar la suma de los primeros 1234 términos de esta sucesión.

315 Problema (AIME 1985) Calcular el producto $x_1x_2\cdots x_8$ si $x_1=97$ y $x_n=n/x_{n-1}, n>1$.

316 Problema (AIME 1993) Durante una campaña política reciente, un candidato hizo una trayectoria que presumimos yace en el plano. En el primer día él viajó hacia el este, en el segundo, él viajó hacia el norte, en el tercero hacia el oeste, en el cuarto hacia el sur, en el quinto hacia el este, etc. Si el candidato viajó $n^2/2$ millas en el n-ésimo día, ¿a cuantas millas estaba él de su punto de partida en el 40avo día?

317 Problema Demostrar que

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

318 Problema Simplificar

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{100^3-1}{100^3+1}.$$

319 Problema Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números arbitrarios. Demostrar que

$$\begin{aligned} & a_1+a_2(1+a_1)+a_3(1+a_1)(1+a_2)+a_4(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \\ & \quad +\cdots+a_{n-1}(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_{n-2}) \\ & \quad\quad =(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)-1. \end{aligned}$$

320 Problema Demostrar que

$$\csc 2+\csc 4+\csc 8+\cdots+\csc 2^n=\cot 1-\cot 2^n.$$

321 Problema Sea $0<x<1$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x}{1-x}.$$

322 Problema Demostrar que

$$\tan\frac{\pi}{2^{100}}+2\tan\frac{\pi}{2^{99}}+2^2\tan\frac{\pi}{2^{98}}+\cdots+2^{98}\tan\frac{\pi}{2^2}=\cot\frac{\pi}{2^{100}}.$$

323 Problema Demostrar que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}.$$

324 Problema Evalúe el radical
$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+\cdots}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+\cdots}\right)^{1/3}.$$

325 Problema Demostrar que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

326 Problema Demostrar que
$$1998 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000000}} < 1999.$$

4.4 Recursiones y ecuaciones funcionales

Veremos ahora métodos para hallar formas cerradas de ciertas recursiones. En general aplicaremos las técnicas de la sección anterior.

327 Ejemplo Sea $x_0 = 7$ y $x_n = 2x_{n-1}, n \geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

▶**Resolución:** *Tenemos*
$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & 2x_0 \\ x_2 & = & 2x_1 \\ x_3 & = & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & 2x_{n-1} \end{array}$$

Multiplicando una y otra columna,
$$x_0x_1\cdots x_n = 7\cdot 2^n x_1x_2\cdots x_{n-1}.$$
Cancelando factores comunes,
$$x_n = 7\cdot 2^n.$$
◀

328 Ejemplo Sea $x_0 = 7$ y $x_n = x_{n-1}+n, n \geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

▶**Resolución:** *Tenemos*
$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & x_0+1 \\ x_2 & = & x_1+2 \\ x_3 & = & x_2+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & x_{n-1}+n \end{array}$$

Sumando una y otra columna,

$$x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n=7+x_0+x_2+\cdots+x_{n-1}+(1+2+3+\cdots+n).$$

Cancelando y simplificando,

$$x_n=7+\frac{n(n+1)}{2}.$$

◀

329 Ejemplo Sea $x_0=7$ y $x_n=2x_{n-1}+1, n\geq 1$. Hallar una fórmula cerrada para x_n.

▶**Resolución:** *Tenemos*

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 7 \\ x_1 & = & 2x_0+1 \\ x_2 & = & 2x_1+1 \\ x_3 & = & 2x_2+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = & 2x_{n-2}+1 \\ x_n & = & 2x_{n-1}+1 \end{array}$$

Aquí no nos funcionan los métodos anteriores, así que nos valdremos del siguiente artificio. Multipliquemos a la k-ésima fila por 2^{n-k}*, obteniendo*

$$\begin{array}{lcl} 2^n x_0 & = & 2^n\cdot 7 \\ 2^{n-1}x_1 & = & 2^n x_0+2^{n-1} \\ 2^{n-2}x_2 & = & 2^{n-1}x_1+2^{n-2} \\ 2^{n-3}x_3 & = & 2^{n-2}x_2+2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^2 x_{n-2} & = & 2^3 x_{n-3}+2^2 \\ 2x_{n-1} & = & 2^2 x_{n-2}+2 \\ x_n & = & 2x_{n-1}+1 \end{array}$$

Sumando una y otra columna y cancelando,

$$x_n=7\cdot 2^n+(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=7\cdot 2^n+2^n-1=2^{n+3}-1.$$

Aliter: *Pongamos* $u_n=x_n+1=2x_{n-1}+2=2(x_{n-1}+1)=2u_{n-1}$*. Luego la recursión* $u_n=2u_{n-1}$ *la resolvemos como en nuestro primer ejemplo, obteniendo de esta forma* $u_n=2^n u_0=2^n(x_0+1)=2^n\cdot 8=2^{n+3}$*. Finalmente* $x_n=u_n-1=2^{n+3}-1$. ◀

330 Ejemplo Una sucesión satisface $u_0=3, u_{n+1}^2=u_n, n\geq 1$. Halle una forma cerrada para ella.

►**Resolución:** *Pongamos* $v_n = \log u_n$. *Entonces* $v_n = \log u_n = \log u_{n-1}^{1/2} = \frac{1}{2}\log u_{n-1} = \frac{v_{n-1}}{2}$. *Como* $v_n = v_{n-1}/2$, *tenemos* $v_n = v_0/2^n$, *o sea,* $\log u_n = (\log u_0)/2^n$. *Luego* $u_n = 3^{1/2^n}$. ◄

331 Ejemplo Halle una forma cerrada para

$$a_0 = 5, a_{j+1} = a_j^2 + 2a_j, j \geq 0.$$

►**Resolución:** *Tenemos*

$$a_{j+1} + 1 = a_j^2 + 2a_j + 1 = (a_j + 1)^2.$$

Pongamos $v_{j+1} = a_{j+1} + 1$. *Entonces* $v_{j+1} = a_{j+1} + 1 = (a_j + 1)^2 = v_j^2$. *De aquí* $v_{j+1} = v_0^{2^j}$, *o sea*

$$a_{j+1} = v_{j+1} - 1 = v_0^{2^j} - 1 = (a_0 + 1)^{2^j} - 1 = 6^{2^j} - 1.$$

◄

332 Ejemplo Una escalera tiene n escalones. Un duende puede subir la escalera de escalón en escalón o saltándose un escalón. Hallar una recursión para el número de maneras en que el duende puede subir la escalera.

►**Resolución:** *Sea* u_n *el número de maneras en que puede el duende subir una escalera de n escalones. El duende puede llegar al último escalón o bien desde el penúltimo o bien desde el antepenúltimo escalón. Luego*

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Es claro que $u_1 = 1, u_2 = 2$. ◄

333 Ejemplo Si $f(x) = f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ y $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ para $n > 0$, hallar $f_{1996}(-1/3)$.

►**Resolución:** *Observe que*

$$f_1(x) = f(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

y

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} = f_0(x).$$

Luego esta recursión es cíclica de orden 3. Esto implica que

$$f_0(x) = f_3(x) = f_6(x) = \cdots,$$

$$f_1(x) = f_4(x) = f_7(x) = \cdots$$

y

$$f_2(x) = f_5(x) = f_8(x) = \cdots.$$

Como $1996 = 1995 + 1$ *deja residuo 1 al ser dividido por 3,*

$$f_{1996}(-1/3) = f_1(-1/3) = 4.$$

◄

334 Ejemplo Hallar todas las funciones que satisfacen

$$f(x+y) + f(x-y) = 4x^2 + 4y^2.$$

►**Resolución:** *Tomando $y=0$, obtenemos $f(x)+f(x)=4x^2$ o $f(x)=2x^2$. Veamos que $f(x)=2x^2$ satisface la ecuación funcional:*

$$f(x+y)+f(x-y)=2(x+y)^2+2(x-y)^2=2x^2+4xy+2y^2+2x^2-4xy+2y^2=4x^2+4y^2.$$

◄

Tarea

335 Problema Sea $x_1=1, x_{n+1}=x_n^2-x_n+1, n>0$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}=1.$$

336 Problema (AIME 1994) La función f tiene la propiedad que para todo número real x,

$$f(x)+f(x-1)=x^2.$$

Si $f(19)=94$, hallar el residuo cuando $f(94)$ se divide por 1000.

337 Problema Hallar una forma cerrada para

$$x_0=-1;\ x_n=x_{n-1}+n^2, n>0.$$

338 Problema Sea $f(x)=f_0(x)=\sqrt{1-x^{-2}}$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)), n>0$. Hallar $f_{99}(4)$.

339 Problema Sea f una función con las siguientes propiedades:
1) $f(n)$ está definida para todo entero positivo n;
2) $f(n)$ es un entero;
3) $f(2)=2$;
4) $f(mn)=f(m)f(n)$ para todo m y n;
5) $f(m)>f(n)$ si $m>n$.
Demostrar que $f(n)=n$.

340 Problema Demostrar que existe una función f única del conjunto $\mathbf{R}^+$ de los reales positivos a $\mathbf{R}^+$ tal que

$$f(f(x))=6x-f(x),\quad f(x)>0\forall\ x>0.$$

341 Problema Si $u_0=1/3$ y $u_{n+1}=2u_n^2-1$, hallar una fórmula para u_n.

342 Problema Una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ satisface $a_1=2$ y

$$a_{m+n}=4^{mn}a_m a_n\quad\forall m,n.$$

Hallar el valor mínimo de n para el cual a_n tiene al menos 3000 dígitos.

343 Problema Sea k un entero no-negativo fijo y supóngase que

$$f(2x)=2^{k-1}\left(f(x)+f(x+\frac{1}{2})\right).$$

Demuéstrese que

$$f(3x)=3^{k-1}\left(f(x)+f(x+\frac{1}{3})+f(x+\frac{2}{3})\right).$$

344 Problema Hallar todas las funciones f que satisfagan

$$f(x)^2\cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=64x.$$

345 Problema (AHSME 1979) La función f satisface

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy+1$$

para todos los números reales x, y. Si $f(1)=1$, hallar todos los enteros $n\neq 1$ tales que $f(n)=n$.

346 Problema (AHSME 1981) La función f no está definida para $x=0$, pero si $x\neq 0$ satisface

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$$

¿Para cuántos valores de x se cumple $f(x)=f(-x)$?

Chapter 5

Polinomios y ecuaciones

5.1 Ecuaciones

A continuación veremos como resolver algunas ecuaciones. La mayoría de ellas son ecuaciones cuadráticas disfrazadas.

Para resolver ecuaciones cuadráticas, el método más eficiente es quizás la compleción del cuadrado. Ésta es preferible a la fórmula cuadrática ya que crea "malicia" para identificar patrones. Por ejemplo, para resolver

$$x^2-6x+3=0,$$

escribimos

$$\begin{aligned} x^2-6x+3 &= x^2-6x+9-6 \\ &= (x-3)^2-(\sqrt{6})^2 \\ &= (x-3+\sqrt{6})(x-3-\sqrt{6}). \end{aligned}$$

De aquí $x=3\pm\sqrt{6}$. De manera semejante, para resolver $2x^2+6x+5=0$ escribimos

$$\begin{aligned} 2x^2+6x+5 &= 2x^2+6x+\frac{9}{2}+\frac{1}{2} \\ &= (\sqrt{2}x+\frac{3}{\sqrt{2}})^2-(i\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \\ &= (\sqrt{2}x+\frac{3}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}x+\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

Luego, $x=-\frac{3}{2}\pm i\frac{1}{2}$.

347 Ejemplo Resolver

$$9+x^{-4}=10x^{-2}.$$

►**Resolución:** *Observe que*

$$x^{-4}-10x^{-2}+9=(x^{-2}-9)(x^{-2}-1).$$

Luego $x=\pm\frac{1}{3}$ *y* $x=\pm 1$. ◄

348 Ejemplo Resolver

$$9^x-3^{x+1}-4=0.$$

►**Resolución:** *Observe que* $9^x - 3^{x+1} - 4 = (3^x - 4)(3^x + 1)$. *Como no existe ningún número real con* $3^x + 1 = 0$, *este factor se descarta. Así* $3^x - 4 = 0$ *nos da* $x = \log_3 4$. ◄

349 Ejemplo Resolver
$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = 504.$$

►**Resolución:** *Reordenemos los factores y multipliquemos para obtener*
$$(x-5)(x-7)(x+6)(x+4) = (x-5)(x+4)(x-7)(x+6) = (x^2-x-20)(x^2-x-42).$$
Pongamos $y = x^2 - x$. *Así* $(y-20)(y-42) = 504$ *o* $y^2 - 62y + 336 = (y-6)(y-56) = 0$. *Luego* $y = 6,\ 56$, *lo que implica*
$$x^2 - x = 6$$
y
$$x^2 - x = 56.$$
De aquí $x = -2, 4, -7, 8$. ◄

350 Ejemplo Resolver
$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0.$$

►**Resolución:** *Reordenando*
$$12x^4 + 12 - 56(x^3 + x) + 89x^2 = 0. \tag{5.1}$$
Dividiendo por x^2,
$$12(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 56(x + \frac{1}{x}) + 89 = 0.$$
Pongamos $u = x + 1/x$. *Luego* $u^2 - 2 = x^2 + 1/x^2$. *Usando esto, (1) se convierte* $12(u^2-2) - 56u + 89 = 0$, *de donde* $u = 5/2,\ 13/6$. *Por lo tanto*
$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$
y
$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}.$$
Concluimos que $x = 1/2, 2, 2/3, 3/2$. ◄

351 Ejemplo Hallar las soluciones reales de
$$x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12.$$

►**Resolución:** *Observe que*
$$x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} - 15 = 0.$$
Poniendo $u = x^2 - 5x + 3$ *obtenemos* $u + 2u^{1/2} - 15 = (u^{1/2} + 5)(u^{1/2} - 3) = 0$. *Luego* $u = 9$ *(descartamos* $u^{1/2} + 5 = 0$, *¿por qué?). Por lo tanto* $x^2 - 5x + 3 = 9$ *o* $x = -1,\ 6$. ◄

352 Ejemplo Resolver
$$\sqrt{3x^2 - 4x + 34} - \sqrt{3x^2 - 4x - 11} = 9. \tag{5.2}$$

►**Resolución:** *Tenemos idénticamente*
$$(3x^2 - 4x + 34) - (3x^2 - 4x - 11) = 45. \tag{5.3}$$

Dividiendo cada miembro de (3) por los miembros correspondientes de (2) obtenemos

$$\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=5. \tag{5.4}$$

Sumando (2) y (4)

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7,$$

de donde $x=-\dfrac{5}{3},3.$ ◄

353 Ejemplo Resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{14+x}+\sqrt[3]{14-x}=4.$$

►**Resolución:** *Póngase* $u=\sqrt[3]{14+x}, v=\sqrt[3]{14-x}$. *Entonces*

$$64=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=14+x+14-x+12(196-x^2)^{1/3},$$

de donde

$$3=(196-x^2)^{1/3},$$

que al resolver nos da $x=\pm 13$. ◄

354 Ejemplo Halle el valor exacto de $\cos 2\pi/5$.

►**Resolución:** *Usando la identidad*

$$\cos(u\pm v)=\cos u\cos v\mp \operatorname{sen} u\operatorname{sen} v$$

par de veces obtenemos

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1 \tag{5.5}$$

y

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta. \tag{5.6}$$

Pongamos $x=\cos 2\pi/5$. *Como* $\cos 6\pi/5=\cos 4\pi/5$, *gracias a las dos identidades (5) y (6), vemos que* x *satisface la ecuación*

$$4x^3-2x^2-3x+1=0,$$

o sea,

$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0.$$

Como $x=\cos 2\pi/5\neq 1$, *y* $\cos 2\pi/5>0$, x *es la raíz positiva de la ecuación cuadrática* $4x^2+2x-1=0$, *es decir*

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

◄

355 Ejemplo ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación

$$\operatorname{sen} x=\frac{x}{100}?$$

►**Resolución:** *Vemos que* $x=0$ *es una solución. Además si* $x>0$ *es una solución,* $-x<0$ *lo es también. Así pues, sólo contaremos las soluciones positivas.*

Para que x *sea una solución, se debe tener* $|x|=100|\operatorname{sen} x|\leq 100$. *Por lo tanto podemos restringir* x *al intervalo* $]0;100]$. *Dividamos este intervalo en subintervalos de longitud* 2π *(con un último intervalo más corto):*

$$]0;100]=]0;2\pi]\cup]2\pi;4\pi]\cup]4\pi;6\pi]\cup\cdots\cup]28\pi;30\pi]\cup]30\pi;100].$$

De las gráficas de $y=\operatorname{sen}x, y=x/100$ *vemos que en el intervalo* $]0;2\pi]$ *existe sólo una solución. En cada intervalo de la forma* $]2\pi k;\ 2(k+1)\pi], k=1,2,\ldots,14$ *existen dos soluciones. El intervalo* $]30\pi;100]$ *tiene una onda completa de longitud* π *(ya que* $31\pi<100$*) en la cual hay dos soluciones. Por consiguiente existen* $1+2\cdot 14+2=31$ *Así pues, hay 31 soluciones positivas y por ende 31 soluciones negativas. Como 0 es también una solución, el total de soluciones reales es por lo tanto* $31+31+1=63$. ◄

356 Ejemplo Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+u &= 4, \\ y+u+v &= -5, \\ u+v+x &= 0, \\ v+x+y &= -8. \end{aligned}$$

►**Resolución:** *Sumando las cuatro ecuaciones y diviendo por 3,*

$$x+y+u+v=-3.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} 4+v &= -3, \\ -5+x &= -3, \\ 0+y &= -3, \\ -8+u &= -3. \end{aligned}$$

De aquí $x=2, y=-3, u=5, v=-7$. ◄

357 Ejemplo Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z)&=30, \\ (y+z)(y+x)&=15, \\ (z+x)(z+y)&=18. \end{aligned}$$

►**Resolución:** *Pongamos* $u=y+z, v=z+x, w=x+y$*. Entonces el sistema se convierte en*

$$vw=30,\ wu=15,\ uv=18. \tag{5.7}$$

Multiplicando todas estas ecuaciones obtenemos $u^2v^2w^2=8100$*, esto es,* $uvw=\pm 90$*. Combinando este resultado con cada una de estas ecuaciones en (7), obtenemos* $u=3, v=6, w=5$*, o* $u=-3, v=-6, w=-5$*. Luego*

$$\begin{aligned} y+z &= 3, & \quad y+z &= -3, \\ z+x &= 6, \quad \text{o} & z+x &= -6, \\ x+y &= 5, & x+y &= -5, \end{aligned}$$

de donde $x=4,\ y=1,\ z=2$ *o* $x=-4,\ y=-1,\ z=-2$.. ◄

Tarea

358 Problema Resolver
$$2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}.$$

359 Problema Resuelva
$$(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)=1680.$$

360 Problema Resuelva
$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0.$$

361 Problema Resolver la ecuación
$$|x-3|^{(x^2-8x+15)/(x-2)}=1.$$

362 Problema Resolver la ecuación
$$x^{0.5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}=3^{\log_9 4}.$$

363 Problema Resolver la ecuación
$$2^{\operatorname{sen}^2 x}+5\cdot 2^{\cos^2 x}=7.$$

364 Problema Resolver la ecuación
$$\log_{1/3}\quad \cos x+\frac{\sqrt{5}}{6}\quad +\log_{1/3}\quad \cos x-\frac{\sqrt{5}}{6}\quad =2.$$

365 Problema ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación
$$\operatorname{sen} x=\ln x?$$

366 Problema Resolver la ecuación
$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$$

367 Problema Hallar las raíces reales de
$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

368 Problema Resolver la ecuación
$$6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0.$$

369 Problema Una progresión geométrica de números reales satisface que la suma de sus primeros cuatro términos es 15 y la suma de los cuadrados de estos términos es 85. Hallar esta progresión.

370 Problema Resolver la ecuación
$$x(2x+1)(x-2)(2x-3)=63.$$

371 Problema Hallar el valor de
$$\sqrt{30\cdot 31\cdot 32\cdot 33+1}.$$

372 Problema Si la ecuación
$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$$
hiciere sentido, hallar el valor de x.

373 Problema Si la ecuación
$$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}=2$$
hiciere sentido, hallar el valor de x.

374 Problema Resolver la ecuación
$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98.$$

375 Problema Sean a,b, c constantes reales con $abc\neq 0$. Resolver el sistema de ecuaciones
$$x^2-(y-z)^2=a^2,$$
$$y^2-(z-x)^2=b^2,$$
$$z^2-(x-y)^2=c^2.$$

376 Problema Resolver el sistema
$$\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2,$$
$$\log_3 x+\log_9 y+\log_9 z=2,$$
$$\log_4 x+\log_{16} y+\log_{16} z=2.$$

377 Problema Resuelva el sistema
$$x^3+3x^2y+y^3=8,$$
$$2x^3-2x^2y+xy^2=1.$$

378 Problema Encuentre una solución real para la ecuación
$$(x^2-9x-1)^{10}+99x^{10}=10x^9(x^2-1).$$

379 Problema Resolver el sistema de ecuaciones
$$x^2-yz=3,$$
$$y^2-zx=4,$$
$$z^2-xy=5.$$

380 Problema Resolver el sistema
$$2x+y+z+u=-1$$
$$x+2y+z+u=12$$
$$x+y+2z+u=5$$
$$x+y+z+2u=-1$$

381 Problema Resolver el sistema de ecuaciones
$$x^2+x+y=8,$$
$$y^2+2xy+z=168,$$
$$z^2+2yz+2xz=12480.$$

382 Problema Hallar las raíces reales de la ecuación
$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n\ \text{radicales}}=x.$$

383 Problema Resolver la ecuación

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots\, 1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}}}=x.$$

Aquí la expresión de la fracción se repite n veces.

384 Problema Resolver el sistema

$$x+2+y+3+\sqrt{(x+2)(y+3)}=39,$$

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(x+2)(y+3)=741.$$

385 Problema Resolver el sistema de ecuaciones

$$x^4+y^4=82,$$

$$x-y=2.$$

386 Problema Resolver el sistema de ecuaciones

$$x_1x_2=1,\ x_2x_3=2,\ \ldots,\ x_{100}x_{101}=100,\ x_{101}x_1=101.$$

387 Problema Resuelva para x

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x+\sqrt{x-11}}=4.$$

388 Problema Dos estudiantes trataron de resolver la ecuación cuadrática $x^2+bx+c=0$. Maguer ambos estudiantes ejecutaron todos los pasos correctamente, el primero copió mal el coeficiente b y obtuvo las soluciones $x=-6,1$. El segundo copió mal c y obtuvo las soluciones $x=2,3$. ¿Cuáles son las soluciones correctas?

5.2 Polinomios

Recordemos que un polinomio es una expresión de la forma

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

Aquí los *coeficientes* a_k de $p(x)$ pueden ser cualquier número complejo. Si las a_k's pertenecen exclusivamente al conjunto de los números enteros diremos que $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Si las a_k's son números reales entonces escribiremos $p(x)\in\mathbb{R}[x]$. Finalmente, escribiremos $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ si las a_k's son números complejos.

389 Ejemplo Hallar la suma de todos los coeficientes obtenidos luego de expandir y simplificar el producto

$$(1-x^2+x^4)^{109}(2-6x+5x^9)^{1996}.$$

►**Resolución:** *Pongamos*

$$p(x)=(1-x^2+x^4)^{109}(2-6x+5x^9)^{1996}.$$

Vemos que $p(x)$ *un polinomio de grado* $4\cdot 109+9\cdot 1996=18400$. *Así pues,* $p(x)$ *es también la expresión*

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18400}x^{18400}.$$

Vemos entonces que la suma de los coeficientes de $p(x)$ *es*

$$p(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{18400},$$

que también es $p(1)=(1-1^2+1^4)^{109}(2-6+5)^{1996}=1$. *Así pues, la suma deseada es igual a* 1. ◄

390 Ejemplo Póngase

$$(1+x^4+x^8)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{800}x^{800}.$$

Hallar:
(A) $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{800}$.
(B) $a_0+a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{800}$.
(C) $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{799}$.
(D) $a_0+a_4+a_8+a_{12}+\cdots+a_{800}$.
(E) $a_1+a_5+a_9+a_{13}+\cdots+a_{797}$.

►**Resolución:** *Pongamos*

$$p(x)=(1+x^4+x^8)^{100}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{800}x^{800}.$$

Entonces
(A)

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{800}=p(1)=3^{100}.$$

(B)

$$a_0+a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{800}=\frac{p(1)+p(-1)}{2}=3^{100}.$$

(C)

$$a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{799}=\frac{p(1)-p(-1)}{2}=0.$$

(D)

$$a_0+a_4+a_8+a_{12}+\cdots+a_{800}=\frac{p(1)+p(-1)+p(i)+p(-i)}{4}=2\cdot 3^{100}.$$

(E)

$$a_1+a_5+a_9+a_{13}+\cdots+a_{797}=\frac{p(1)-p(-1)-ip(i)+ip(-i)}{4}=0.$$

◀

Otra propiedad de los polinomios que es a menudo útil es el algoritmo de división: si dividimos $p(x)$ por $a(x)$ obtendremos polinomios $q(x),r(x)$ con

$$p(x)=a(x)q(x)+r(x).$$

Aquí $0\leq$ grado $r(x)<$ grado $a(x)$. Por ejemplo, al dividir x^5+x^4+1 por x^2+1 obtenemos

$$x^5+x^4+1=(x^3+x^2-x-1)(x^2+1)+x+2,$$

de donde el cociente es $q(x)=x^3+x^2-x-1$ y el residuo es $r(x)=x+2$.

391 Ejemplo Hallar el residuo cuando $(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}$ se divide por $x+2$.

►**Resolución:** *Como estamos dividiendo por un polinomio de grado 1, el residuo es un polinomio de grado 0, es decir, una constante. Así pues, existe un polinomio $q(x)$ y una constante r con*

$$(x+3)^5+(x+2)^8+(5x+9)^{1997}=q(x)(x+2)+r$$

Si ponemos $x=-2$ obtenemos

$$0=(-2+3)^5+(-2+2)^8+(5(-2)+9)^{1997}=q(-2)(-2+2)+r=r,$$

de donde el residuo es $r=0$. ◀

392 Ejemplo Un polinomio deja residuo -2 cuando se divide por $x-1$ y residuo -4 cuando se divide por $x+2$. Hallar el residuo cuando este polinomio se divide por x^2+x-2.

►**Resolución:** *De la información dada existen polinomios $q_1(x),q_2(x)$ con $p(x)=q_1(x)(x-1)-2$ y $p(x)=q_2(x)(x+2)-4$. Luego $p(1)=-2$ y $p(-2)=-4$. Ahora bien, como $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ es un polinomio de grado 2, el residuo $r(x)$ al dividir $p(x)$ por x^2+x-1 es de grado 1 o menor, es decir $r(x)=ax+b$ para constantes a,b que debemos determinar. Por el algoritmo de división*

$$p(x)=q(x)(x^2+x-1)+ax+b.$$

Luego

$$-2=p(1)=a+b$$

y

$$-4=p(-2)=-2a+b.$$

De estas ecuaciones vemos que $a=2/3,b=-8/3$. Luego el residuo es $r(x)=2x/3-8/3$. ◀

393 Ejemplo Sea $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Hallar el residuo cuando $f(x^5)$ se divide por $f(x)$.

▶**Resolución:** *Observe que* $f(x)(x-1) = x^5 - 1$ *y*

$$f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5.$$

Cada sumando en paréntesis es divisible por $x^5 - 1$ *y por ende por* $f(x)$. *Luego el residuo es* 5. ◀

El algoritmo de división nos ayuda a demostrar el siguiente resultado, a menudo conocido como el Teorema del factor.

394 Teorema (Teorema de Ruffini) El polinomio $p(x)$ es divisible por $x - a$ si y sólo si $p(a) = 0$.

Demostración: *Como* $x - a$ *es un polinomio de grado 1, el residuo al dividir* $p(x)$ *por* $x - a$ *es un polinomio de grado 0, es decir, una constante. Así*

$$p(x) = q(x)(x - a) + r.$$

De aquí $p(a) = q(a)(a - a) + r = r$. *El teorema se deduce de esto.* ❑

395 Ejemplo Si $p(x)$ un polinomio cúbico con $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$. Hallar $p(6)$.

▶**Resolución:** *Pongamos* $g(x) = p(x) - x$. *Entonces* $g(x)$ *es un polinomio de grado 3 y* $g(1) = g(2) = g(3) = 0$. *Luego* $g(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$ *para alguna constante* c *que debemos determinar. Pero* $g(4) = c(4-1)(4-2)(4-3) = 6c$ *y* $g(4) = p(4) - 4 = 1$, *de donde* $c = 1/6$. *Finalmente*

$$p(6) = g(6) + 6 = \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} + 6 = 16.$$

◀

396 Ejemplo El polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros y $p(x) = 7$ para cuatro valores enteros diferentes de x. Demostrar que $p(x) \neq 14$ para ningún entero x.

▶**Resolución:** *El polinomio* $g(x) = p(x) - 7$ *se anula para cuatro enteros diferentes* a, b, c, d. *Luego, por el Teorema del factor,*

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x),$$

para algún polinomio $q(x)$ *con coeficientes enteros. Supongamos que* $p(t) = 14$ *para algún entero* t. *Entonces* $g(t) = p(t) - 7 = 14 - 7 = 7$. *De aquí*

$$7 = g(t) = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)q(t),$$

esto es, hemos factorizado a 7 *como el producto de al menos cuatro factores enteros distintos, lo que es imposible, pues* 7 *es a lo sumo* $7(-1)1$ *el producto de tres enteros distintos. De esta contradicción colegimos que no existe tal entero* t. ◀

397 Ejemplo Hallar un polinomio cúbico $p(x)$ que se anule cuando $x = 1, 2, 3$ y que satisfaga $p(4) = 666$.

▶**Resolución:** *El polinomio debe tener la forma* $p(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$, *donde* a *es una constante. Como* $666 = p(4) = a(4-1)(4-2)(4-3) = 6a$, $a = 111$. *Luego el polinomio deseado es* $p(x) = 111(x-1)(x-2)(x-3)$. ◀

398 Ejemplo Hallar un polinomio cúbico $p(x)$ con $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 5$.

►**Resolución:** *Utilizaremos el siguiente método debido a Lagrange. Sea*

$$p(x) = a(x) + 2b(x) + 3c(x) + 5d(x),$$

donde $a(x), b(x), c(x), d(x)$ *son polinomios cúbicos con las siguientes propiedades:* $a(1) = 1$ *y* $a(x)$ *se anula para* $x = 2,3,4$*;* $b(2) = 1$ *y* $b(x)$ *se anula cuando* $x = 1,3,4$*;* $c(3) = 1$ *y* $c(3) = 1$ *se anula para* $x = 1,2,4$ *y* $d(4) = 1$, $d(x)$ *anulándose cuando* $x = 1,2,3$.

Utilizando el método del problema anterior hallamos

$$a(x) = -\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6},$$

$$b(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2},$$

$$c(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}$$

y

$$d(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}.$$

Así

$$p(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) \\ -\frac{3}{2} \cdot (x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3).$$

El lector podrá verificar que este polinomio cumple con las condiciones estipuladas. ◄

Por último discutiremos las fórmulas de Viète y las identidades de Newton-Girard. Para introducir el tópico consideremos primero el siguiente ejemplo.

399 Ejemplo Hallar el producto

$$(x+1)(x-2)(x+4)(x-5)(x+6).$$

►**Resolución:** *Vemos que el producto es un polinomio de grado 5. Para obtener el coeficiente de* x^5 *tomamos una* x *de cada binomio. Así pues el coeficiente de* x^5 *es 1. Para formar el término de* x^4 *tomamos una* x *de cuatro de los binomios y una constante del binomio restante. Así pues, el coeficiente de* x^4 *es*

$$1-2+4-5+6 = 4.$$

Para formar el término de x^3 *tomamos tres* x *de tres de los binomios y dos constantes de los dos binomios restantes. Así el coeficiente de* x^3 *es*

$$(1)(-2)+(1)(4)+(1)(-5)+(1)(6)+(-2)(4)+(-2)(-5)+(-2)(6) \\ +(4)(-5)+(4)(6)+(-5)(6) = -33.$$

De manera semejante, el coeficiente de x^2 *es*

$$(1)(-2)(4)+(1)(-2)(-5)+(1)(-2)(6)+(1)(4)(-5)+(1)(4)(6)+(-2)(4)(-5) \\ +(-2)(4)(6)+(4)(-5)(6) = -134$$

y el coeficiente de x *es*

$$(1)(-2)(4)(-5)+(1)(-2)(4)(6)+(1)(-2)(-5)(6)+(1)(4)(-5)(6)+(-2)(4)(-5)(6) = 172.$$

Finalmente, el término constante es $(1)(-2)(4)(-5)(6) = 240$. *El producto pedido es entonces*

$$x^5 + 4x^4 - 33x^3 - 134x^2 + 172x + 240.$$

◄

Del ejemplo anterior vemos que cada término tiene un “peso” de 5, pues de cada uno de los cinco binomios o bien tomamos el término de x o bien tomamos la constante.

Si $a_0 \neq 0$ y

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

es un polinomio con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entonces podemos escribir

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n).$$

De esto deducimos las *fórmulas de Viète:*

$$-\frac{a_1}{a_0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \sum_{1\leq j<k\leq n} \alpha_j\alpha_k,$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \sum_{1\leq j<k<l\leq n} \alpha_j\alpha_k\alpha_l,$$

$$\frac{a_4}{a_0} = \sum_{1\leq j<k<l<s\leq n} \alpha_j\alpha_k\alpha_l\alpha_s,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^n\frac{a_n}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

400 Ejemplo Hallar la suma de las raíces, la suma de las raíces tomadas de dos en dos, la suma de los cuadrados de las raíces y la suma de los recíprocos de las raíces de la ecuación

$$2x^3 - x + 2 = 0.$$

►**Resolución:** *Sean a, b, c las raíces de $2x^3 - x + 2 = 0$. Por las fórmulas de Viète la suma de las raíces es*

$$a + b + c = -\frac{0}{2} = 0$$

y la suma de las raíces tomadas de dos en dos es

$$ab + ac + bc = \frac{-1}{2}.$$

Para hallar $a^2 + b^2 + c^2$ recurrimos a la siguiente identidad

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc).$$

Luego

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0^2 - 2(-1/2) = 1.$$

Finalmente, como $abc = -2/2 = -1$, vemos que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{-1/2}{-1} = 1/2.$$

◄

401 Ejemplo Sean α,β,γ las raíces de $x^3-x^2+1=0$. Hallar

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}.$$

►**Resolución:** *De $x^3-x^2+1=0$ deducimos $1/x^2=1-x$. Luego*

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=(1-\alpha)+(1-\beta)+(1-\gamma)=3-(\alpha+\beta+\gamma)=3-1=2.$$

◄

Conjunto con las fórmulas de Viète tenemos las *identidades de Newton-Girard* para las sumas de potencias $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$ de las raíces:

$$a_0s_1+a_1=0,$$
$$a_0s_2+a_1s_1+2a_2=0,$$
$$a_0s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0,$$

etc..

402 Ejemplo Si a,b,c son las raíces de $x^3-x^2+2=0$, hallar

$$a^2+b^2+c^2$$
$$a^3+b^3+c^3$$

y

$$a^4+b^4+c^4.$$

►**Resolución:** *Primero observamos que*

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=1^2-2(0)=1.$$

Como $x^3=x^2-2$, obtenemos

$$a^3+b^3+c^3=a^2-2+b^2-2+c^2-2=a^2+b^2+c^2-6=1-6=-5.$$

Finalmente, de $x^3=x^2-2$ obtenemos $x^4=x^3-2x$, de donde

$$a^4+b^4+c^4=a^3-2a+b^3-2b+c^3-2c=a^3+b^3+c^3-2(a+b+c)=-5-2(1)=-7.$$

◄

403 Ejemplo (USAMO 1973) Determine todas las soluciones, reales o complejas del sistema de ecuaciones

$$x+y+z=3,$$
$$x^2+y^2+z^2=3,$$
$$x^3+y^3+z^3=3.$$

►**Resolución:** *Sean x,y,z las raíces del polinomio*

$$p(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz.$$

Ahora bien, $xy+yz+zx=(x+y+z)^2/2-(x^2+y^2+z^2)/2=9/2-3/2=3$ y de

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

se desprende que $xyz=1$. Luego

$$p(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3.$$

Luego $x=y=z=1$ es la única solución del sistema anterior. ◄

Tarea

404 Problema Sea

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}.$$

Hallar

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}.$$

405 Problema Demostrar que las tres raíces de $x^3 - 1 = 0$ son $\omega = 1/2 + i\sqrt{3}/2, \omega^2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$ y $\omega^3 = 1$. Demostrar que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

406 Problema Sea

$$(1+x^2+x^4)^{100} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{400}x^{400}.$$

Hallar

$$a_0 + a_3 + a_6 + \cdots + a_{399}.$$

407 Problema El polinomio $p(x)$ satisface $p(-x) = -p(x)$. Cuando $p(x)$ es dividido por $x-3$ el residuo es 6. ¿Cuál es el residuo cuando $p(x)$ es dividido por $x^2 - 9$?

408 Problema La ecuación $x^4 - 16x^3 + 94x^2 + px + q = 0$ tiene dos raíces dobles. Hallar $p+q$.

409 Problema (USAMO 1984) El producto de dos de las raíces de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

es -32. Determine el valor de k.

410 Problema Si $p(x)$ es un polinomio de grado n tal que $p(k) = 1/k, k = 1, 2, \ldots, n+1$, hallar el valor de $p(n+2)$.

411 Problema Suponga que

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = (x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_n)$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son números reales. Demuestre que

$$(n-1)a_1^2 \geq 2na_2.$$

412 Problema Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ son las raíces de

$$x^{100} - 10x + 10 = 0,$$

hallar la suma

$$\alpha_1^{100} + \alpha_2^{100} + \cdots + \alpha_{100}^{100}.$$

413 Problema Hallar un polinomio $p(x)$ de grado 4 con $p(1) = -1, p(2) = 2, p(-3) = 4, p(4) = 5, p(5) = 8$.

414 Problema Sean α, β, γ las raíces de $x^3 - x - 1 = 0$. Halle

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}$$

y

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5.$$

415 Problema Los números reales α, β safisfacen

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0,$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

Demuestre que $\alpha + \beta = 2$.

Chapter 6

Desigualdades

6.1 Desigualdades del triángulo

Se presume que $\mathbb{R}$ está dotado de una relación $>$ que satisface los siguientes axiomas.

416 Axioma (Ley de tricotomía) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ exactamente una de las siguientes se cumple:

$$x > y, \quad x = y, \quad \text{o} \quad y > x.$$

417 Axioma (Transitividad) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{si} \quad x > y \quad \text{y} \quad y > z \quad \text{entonces} \quad x > z.$$

418 Axioma (Conservación de las desigualdades en la adición) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{si} \quad x > y \quad \text{entonces} \quad x + z > y + z.$$

419 Axioma (Conservación de las desigualdades en la multiplicación por factores positivos) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\text{si} \quad x > y \quad \text{y} \quad z > 0 \quad \text{entonces} \quad xz > yz.$$

☞ *$x < y$ es lo mismo que $y > x$. $x \leq y$ quiere decir $y > x$, o bien $y = x$, etc.*

☞ ***¡Alerta al vocabulario!** Se dirá que un número x es* positivo *si $x \geq 0$ y que es* estrictamente positivo *si $x > 0$. De manera semejante, se dirá que un número y es* negativo *si $y \leq 0$ y que es* estrictamente negativo *si $y < 0$. Este uso difiere de algunos autores, que suelen utilizar palabrotas en neo-lengua como* no-negativo *y* no-positivo.

420 Definición (La función signum) Sea x un número real. La *función signum* se define y se denota por

$$\operatorname{signum}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ +1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

El siguiente lema es inmediato.

421 Lema La función signum es multiplicativa, esto es, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $\mathrm{signum}(x \cdot y) = \mathrm{signum}(x)\,\mathrm{signum}(y)$.

422 Definición (Valor absoluto) Sea $x \in \mathbb{R}$. El *valor absoluto* de x se define y se denota por

$$|x| = \mathrm{signum}(x)\,x.$$

Las siguientes propiedades del valor absoluto se deducen de inmediato de su definición.

423 Teorema Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $|x| = \begin{cases} -x & \text{if } x < 0, \\ x & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$
2. $|x| \geq 0$,
3. $|x| = \max(x, -x)$,
4. $|-x| = |x|$,
5. $-|x| \leq x \leq |x|$.
6. $\sqrt{x^2} = |x|$
7. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
8. $x = \mathrm{signum}(x)\,|x|$

424 Teorema $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

Demostración: *Se tiene*

$$|xy| = \mathrm{signum}(xy)\,xy = (\mathrm{signum}(x)\,x)\,(\mathrm{signum}(y)\,y) = |x|\,|y|,$$

en donde se ha utilizado el lema 421. ❑

425 Teorema Sea $t \geq 0$. Entonces

$$|x| \leq t \iff -t \leq x \leq t.$$

Demostración: *O bien, $|x| = x$, o bien, $|x| = -x$. Si $|x| = x$,*

$$|x| \leq t \iff x \leq t \iff -t \leq 0 \leq x \leq t.$$

Si $|x| = -x$,

$$|x| \leq t \iff -x \leq t \iff -t \leq x \leq 0 \leq t.$$

❑

426 Teorema Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ y $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Demostración: *Obviamente, $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$. Ahora, o bien $|x-y| = x-y$ y entonces $x \geq y$, lo que significa que $\max(x,y) - \min(x,y) = x-y$, o bien $|x-y| = -(x-y) = y-x$, lo que significa que $y \geq x$ y* *entonces* $\max(x,y) - \min(x,y) = y - x$. *En cualquier caso,* $\max(x,y) - \min(x,y) = |x - y|$. *Resolviendo el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \max(x,y) + \min(x,y) &= x + y \\ \max(x,y) - \min(x,y) &= |x - y|, \end{aligned}$$

para $\max(x,y)$ *y para* $\min(x,y)$ *se obtiene el resultado.* ❑

427 Teorema (Desigualdad del triángulo) Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|.} \tag{6.1}$$

Demostración: *De 5 en el teorema 423, por adición,*

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

to

$$-|b| \leq b \leq |b|,$$

obteniendo

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|),$$

de donde sigue el teorema, en aplicando 425. ❑

Por inducción, se obtiene la siguiente generalización,

428 Corolario Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales. Entonces

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Demostración: *Aplicando el teorema 427* $n - 1$ *veces*

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| &\leq |x_1| + |x_2 + \cdots x_{n-1} + x_n| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + |x_3 + \cdots x_{n-1} + x_n| \\ &\vdots \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{n-1} + x_n| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|. \end{aligned}$$

❑

429 Corolario Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\boxed{||a| - |b|| \leq |a - b|}. \tag{6.2}$$

Demostración: *Se tiene*

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

dando

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

De manera semejante,

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

dando

$$|b| - |a| \leq |a - b| \implies -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Así,

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$

y se aplica ahora el teorema 425. ❑

430 Ejemplo (Desigualdad de Weierstrass) Sea $n > 0$ un entero. Sea $x_i \geq 0$ para toda $i \in [1; n]$. Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Estudiar el caso de igualdad.

►**Resolución:** *Expandiendo el producto*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} x_i x_j + \cdots \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

la igualdad cumpliéndose porque $x_k \geq 0$*. Cuando* $n = 1$ *la igualdad es obvia. Si* $n > 1$ *la igualdad se cumple para* $\sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} x_i x_j = 0$. ◄

431 Ejemplo Demostrar que para todo $x > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}.$$

►**Resolución:** *Obsérvese que* $k \geq 1$, $(x+k)^2 > (x+k)(x+k-1)$ *y por lo tanto*

$$\frac{1}{(x+k)^2} < \frac{1}{(x+k)(x+k-1)} = \frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+n-1)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \quad &< \quad \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)((x+3))} \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{(x+n-2)(x+n-1)} + \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{x+n-2} - \frac{1}{x+n-1} + \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}.
\end{aligned}$$

◄

432 Ejemplo Sean $x_i \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1$ y que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Demuéstrese que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

►**Resolución:** *Para* $1 \leq i \leq n$, *se tiene*

$$\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| \leq 1 - \frac{1}{n} \iff \left(\frac{2}{i} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \iff \frac{4}{i^2} - \frac{4}{i}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{n} \leq 0 \iff \frac{(i-n)(i-1)}{i^2 n} \leq 0.$$

Thus

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{i} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) x_i\right|,$$

ya que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. *Ahora bien,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{i} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| |x_i| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

◄

Tarea

433 Problema Sean x, y números reales. Demostrar que

$$0 \leq x < y \iff x^2 < y^2.$$

434 Problema Sean $t \geq 0$, números reales. Demostrar que

$$|x| \geq t \iff (x \geq t) \quad \text{or} \quad (x \leq -t).$$

435 Problema Sean $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. números reales. Demostrar que $\max(x,y) = -\min(-x,-y)$.

436 Problema Sean x, y, z números reales. Demostrar que

$$\max(x,y,z) = x + y + z - \min(x,y) - \min(y,z) - \min(z,x) + \min(x,y,z).$$

437 Problema Dar una demostración puramente geométrica de la desigualdad de Minkowski en dos dimensiones. Esto es, si $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, demuéstrese que

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Igualdad ocurre si y sólo si $ad = bc$.

438 Problema Sean $b > 0$ y $B > 0$. Demostrar que

$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+A}{b+B} < \frac{A}{B}.$$

Aún más, si p y q son enteros positivos tales que

$$\frac{7}{10} < \frac{p}{q} < \frac{11}{15},$$

hallar el valor mínimo de q.

439 Problema Sea $a < b$. Demostrar que

$$|x - a| < |x - b| \iff x < \frac{a+b}{2}.$$

440 Problema Si $x > 0$, usando la identidad

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}},$$

demostrar que

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Utilícese este hecho para demostrar que si $n > 1$ es un entero, entonces

$$2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

441 Problema Demostrar que si $n > 2$ es un entero, entonces

$$n^{n/2} < n!.$$

442 Problema Demostrar que

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}.$$

443 Problema Sea $n \geq 2$ un entero y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reales tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$.

Demostrar que

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

444 Problema Dado un conjunto de números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ demostrar que existe un índice $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tal que

$$\underset{1\leq k\leq m}{a_k} - \underset{m<k\leq n}{a_k} \leq \max_{1\leq k\leq n} |a_k|.$$

Si $m = 0$ la primera suma se toma como 0 y si $m = n$, la segunda se toma como 0.

6.2 El cuadrado de todo real es positivo

445 Teorema El cuadrado de todo real es positivo, esto es, $\forall a \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 \geq 0$. Aún más, si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

Demostración: *Si $a = 0$, entonces $0^2 = 0$ y no hay nada que demostrar. Presúmase ahora que $a \neq 0$. Por tricotomía, o bien $a > 0$ o bien $a < 0$. Presúmase primero que $a > 0$. Gracias al axioma 419 con $x = z = a$ y $y = 0$, se tiene*

$$aa > a0 \implies a^2 > 0,$$

mostrando el teorema cuando $a > 0$.

Presúmase ahora que $a < 0$. Entonces $-a > 0$ y se aplica lo venido de demostrar:

$$-a > 0 \implies (-a)^2 > 0 \implies 1 \cdot a^2 > 0 \implies a^2 > 0,$$

obteniendo nuevamente el resultado. ❑

El teorema 445 probará ser extremadamente útil y será la base de las desigualdades clásicas de este capítulo. Se comenzará con la desigualdad de las medias, de la que se darán varias demostraciones y generalizaciones en las páginas subsiguientes.

446 Teorema (Desigualdad de las medias aritmética y geométrica) Sean $a \geq 0$, $b \geq 0$. Entonces

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

con igualdad si y sólo si $a = b$.

Demostración: *Por el teorema 445,*

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$$

con igualdad si y sólo si $a = b$. Expandiendo,

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \iff \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

demostrando el teorema. ❑

447 Teorema (Desigualdad de las medias armónica y geométrica) Sean $a > 0$, $b > 0$. Entonces

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

si y sólo si $a = b$.

Demostración: *Por el teorema 446,*

$$\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \iff \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab},$$

demostrando el teorema. ❑

448 Ejemplo Demostrar que la suma de todo real estrictamente positivo y su recíproco es al menos 2.

►**Resolución:** *Sea* $x > 0$. *Entonces*

$$1 = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \implies 2 \leq x + \frac{1}{x},$$

demostrando la aserción. Nótese que hay igualdad si y sólo si

$$x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff x = 1,$$

ya que se presume $x > 0$. ◄

449 Ejemplo Sean a, b dos reales no nulos. Determinar el valor mínimo de

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}.$$

►**Resolución:** *Se tiene*

$$\begin{aligned} \frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2} &= \left(\frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6}\right) + \left(\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 \\ &= 6, \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $a = b$. ◄

450 Ejemplo Demostrar que si $x > 0, y > 0$, entonces

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

►**Resolución:** *Se tiene*

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} &\leq \frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}} + \frac{y}{2\sqrt{x^2y^4}} \\ &\leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2xy^2} \\ &= \frac{1}{xy}. \end{aligned}$$

◄

451 Ejemplo Sean u_1, u_2, u_3, u_4 reales positivos. Aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica de dos números, establecer la desigualdad de las medias aritmética y geométrica de cuatro números:

$$(u_1u_2u_3u_4)^{1/4} \leq \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \tag{6.3}$$

►**Resolución:** *Se tiene* $\sqrt{u_1u_2} \leq \dfrac{u_1 + u_2}{2}$ *y* $\sqrt{u_3u_4} \leq \dfrac{u_3 + u_4}{2}$. *Ahora, aplicando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica de dos números dos veces a* $\sqrt{u_1u_2}$ *y* $\sqrt{u_3u_4}$ *se obtiene*

$$\sqrt{\sqrt{u_1u_2}\sqrt{u_3u_4}} \leq \frac{\sqrt{u_1u_2} + \sqrt{u_3u_4}}{2} \leq \frac{\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_3+u_4}{2}}{2}.$$

Simplificando se obtiene el resultado deseado. ◄

452 Ejemplo Sean u,v,w reales positivos. Utilizando el ejemplo 451, demostrar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica de tres números:

$$(uvw)^{1/3} \leq \frac{u+v+w}{3} \tag{6.4}$$

►**Resolución:** *Por el ejemplo 451,*

$$uvw\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{1/4} \leq \frac{u+v+w+\frac{u+v+w}{3}}{4}.$$

Luego de masajear la desigualdad anterior, se obtiene

$$(uvw)^{1/4}\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{1/4} \leq \frac{u+v+w}{4}+\frac{u+v+w}{12},$$

lo que equivale a

$$(uvw)^{1/4}\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{1/4} \leq \frac{u+v+w}{3}.$$

Multiplicando uno y otro lado por $\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{-1/4}$ *se obtiene*

$$(uvw)^{1/4} \leq \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{3/4},$$

de donde se destila el resultado. ◄

453 Ejemplo Demostrar que si a,b,c son reales positivos entonces

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

►**Resolución:** *El resultado se obtiene en seguida en multiplicando las desigualdades* $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ *y* $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. ◄

454 Ejemplo Sean a,b,c,d, números reales ligados por la relación $a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da$. Demostrar que $a=b=c=d$.

►**Resolución:** *Se tiene,*

$$a^2-ab+b^2-bc+c^2-dc+d^2-da=0,$$

o sea,

$$\frac{a^2}{2}-ab+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}-bc+\frac{c^2}{2}+\frac{c^2}{2}-dc+\frac{d^2}{2}+\frac{d^2}{2}-da+\frac{a^2}{2}=0.$$

Descomponiendo en factores,

$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2=0.$$

Como la suma de números positivos es cero solamente cuando cada número es cero, se obtiene $a=b, b=c, c=d, d=a$, *lo que demuestra la aserción.* ◄

Se nota de paso que de la identidad

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \tag{6.5}$$

se obtiene la desigualdad

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca. \tag{6.6}$$

455 Teorema Sean $(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4$ con $x>0$, $y>0$. Entonces

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Hay igualdad si y sólo si $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Demostración: *Como el cuadrado de todo real es positivo,*

$$\begin{aligned}(ay-bx)^2\geq 0 &\implies a^2y^2-2abxy+b^2x^2\geq 0\\ &\implies a^2y(x+y)+b^2x(x+y)\geq(a+b)^2xy\\ &\implies \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}.\end{aligned}$$

Se cumple igualdad si y sólo si $ay=bx$.❑

Iterando el teorema 455, se obtiene el corolario siguiente.

456 Corolario Sean a_k,b_k números reales con $b_k>0$.

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n},$$

con igualdad si y sólo si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

457 Ejemplo Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reales estrictamente positivos satisfaciendo $a_1a_2\cdots a_n=1$. Demostrar que

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq 2^n.$$

►**Resolución:** *Como $1+a\geq 2\sqrt{a}$ para $a\geq 0$, se tiene*

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\geq 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdots 2\sqrt{a_n}\\ &= 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}\\ &= 2^n,\end{aligned}$$

demostrando la aserción. ◄

458 Ejemplo (Desigualdad de Nesbitt) Sean a,b,c reales estrictamente positivos. Probar que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

►**Resolución:** *Esta es una de varias demostraciones que se dará de esta famosa desigualdad. Póngase*

$$u=b+c,\quad v=c+a,\quad w=a+b.$$

Así

$$\frac{u+v+w}{2}=a+b+c\implies a=\frac{v+w-u}{2},\quad b=\frac{u+w-v}{2},\quad c=\frac{u+v-w}{2}.$$

Entonces, usando $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ *para* $a>0$, $b>0$, *se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{v+w-u}{2u}+\frac{u+w-v}{2v}+\frac{u+v-w}{2w}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v}{w}+\frac{w}{v}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{w}{u}+\frac{u}{w}\right)-\frac{3}{2}\\
&\geq 1+1+1-\frac{3}{2}\\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

obteniendo el resultado. ◀

459 Ejemplo (IMO 1979) Hallar todos los reales a para los cuales existen reales positivos x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 satisfaciendo,

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=a,\qquad x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5=a^2,\qquad x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5=a^3.$$

►**Resolución:** *Se tiene*

$$\begin{aligned}
0 &= a^2\cdot a-2a\cdot a^2+a^3\\
&= a^2(x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5)-2a(x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5)+(x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5)\\
&= (a-1)^2x_1+2(a-2^2)^2x_2+3(a-3^2)^2x_3+4(a-4^2)^2x_4+5(a-5^2)^2x_5.
\end{aligned}$$

Cada término debe ser cero por separado, de donde para cada k, $x_k=0$ *o* $a=k^2$*, así que hay cinco valores para a:* $1,4,9,16,25$. ◀

Tarea

460 Problema Sean $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tales que

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4.$$

Demostrar que $x_k\in\{0,1\}$.

461 Problema Sea $n\geq 2$ un entero. Sea $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1.$$

Demostrar que $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

462 Problema Sean a,b,c,d números reales. Demuéstrese que

$$\min\left(a-b^2,b-c^2,c-d^2,d-a^2\right)\leq\frac{1}{4}.$$

463 Problema Demostrar que si $r\geq s\geq t$ entonces

$$r^2-s^2+t^2\geq(r-s+t)^2.$$

464 Problema Si $0<a\leq b$, demostrar que

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{(b-a)^2}{b}\leq\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leq\frac{1}{8}\cdot\frac{(b-a)^2}{a}$$

465 Problema Demostrar que $\forall a\in\mathbb{R}$, $3a^4-10a^2+9>0$.

466 Problema Sean $a\geq 0$ y $b\geq 0$. Demostrar que

$$\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}.$$

467 Problema Sean a,b reales estrictamente positivos. Entonces,

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{1}{3},$$

con igualdad si y sólo si $a=b$.

468 Problema Demostrar que si a,b,c son reales positivos, entonces

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq 8abc.$$

469 Problema La suma de dos reales positivos es 100. Maximizar su producto.

470 Problema Demostrar que si a,b,c son reales positivos, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3.$$

471 Problema Sean a,b,c números reales. Demostrar que

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Utilizar esta identidad para demostrar nuevamente que

$$\sqrt[3]{uvw} \leq \frac{u+v+w}{3}$$

para reales positivos u, v, w.

472 Problema (AIME 1983) Minimizar la función

$$x \mapsto \frac{9x^2 \operatorname{sen}^2 x + 4}{x \operatorname{sen} x}$$

en el intervalo $]0;\pi[$.

473 Problema Demostrar que si $0 \leq x \leq 1$ entonces $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Luego demostrar que si $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ entonces alguno de entre los productos

$$a(1-b), \; b(1-c), \quad c(1-d), \; d(1-a)$$

es $\leq \frac{1}{4}$.

474 Problema Demostrar que si x, y, son números reales positivos, entonces

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}.$$

475 Problema Demostrar que si a, b, c son las longitudes de los lados de cualquier triángulo, entonces

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

476 Problema Sean x, y, z reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

477 Problema Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca).$$

478 Problema Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

479 Problema Sean x, y, z números reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} + \frac{y^2-x^2}{z+x} + \frac{z^2-y^2}{x+y} \geq 0$$

y determinar cuando se cumple la igualdad.

480 Problema Sean a, b, c números reales estrictamente positivos tales que $abc = 1$. Demuéstrese que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

481 Problema Sean a, b, c, números reales estrictamente positivos tales que $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 > 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$. Demostrar que a, b, c son longitudes de los lados de un triángulo.

6.3 Desigualdades de las medias

482 Teorema (Desigualdad de las medias aritmética y geométrica) Sean $a_1, \ldots, a_k$ números reales positivos. Su media geométrica es a lo sumo su media aritmética, esto es,

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k},$$

con igualdad $a_1 = \cdots = a_k$.

Se darán varias demostraciones de tan importante resultado, tanto en esta sección como en secciones subsiguientes. Estas ilustrarán varias técnicas útiles.

Demostración primera: *La primera demostración es un argumento por inducción un tanto truculento debido a Cauchy. Se demostrará la desigualdad primero para potencias de* 2 *y luego se interpolará entre potencias de* 2.

Los casos $k = 2$ y $k = 4$ se han demostrado en el teorema 446 y en el ejemplo 451. Presúmase ahora que la desigualdad es válida para $k = 2^{n-1} > 2$, esto es, presúmase que para reales positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{2^{n-1}}$ se tiene

$$(x_1 x_2 \cdots x_{2^{n-1}})^{1/2^{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}. \tag{6.7}$$

Se demostrará ahora la desigualdad para $2k = 2^n$. Considérese ahora reales positivos $y_1, y_2, \ldots, y_{2^n}$. Nótese que *hay* $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$ *enteros en el intervalo* $\left[2^{n-1}+1\,;2^n\right]$. *Se tiene,*

$$\begin{aligned}
(y_1y_2\cdots y_{2^n})^{1/2^n} &= \sqrt{(y_1y_2\cdots y_{2^{n-1}})^{1/2^{n-1}}\left(y_{2^{n-1}+1}\cdots y_{2^n}\right)^{1/2^{n-1}}} \\
&\leq \frac{(y_1y_2\cdots y_{2^{n-1}})^{1/2^{n-1}}+\left(y_{2^{n-1}+1}\cdots y_{2^n}\right)^{1/2^{n-1}}}{2} \\
&\leq \frac{\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_{2^{n-1}}}{2^{n-1}}+\dfrac{y_{2^{n-1}+1}+\cdots+y_{2^n}}{2^{n-1}}}{2} \\
&= \frac{y_1+\cdots+y_{2^n}}{2^n},
\end{aligned}$$

en donde la primera desigualdad sigue del caso $k=2$ *y la segunda de la hipótesis inductiva (6.7). Queda así demostrado el teorema para potencias de* 2.

Presúmase ahora que $2^{n-1} < k < 2^n$ *y considérense los* k *reales positivos* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *El truco es de aumentar esta colección hasta tener* 2^n *números y utilizar el resultado obtenido para potencias de* 2. *El "relleno" será el promedio de los números* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. *Así pues, considérese los* 2^n *números reales*

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{2^n}$$

con $a_{k+1} = \ldots = a_{2^n} = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$. *Por lo ya demostrado para* 2^n *se tiene*

$$\left(a_1a_2\cdots a_k\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{2^n-k}\right)^{1/2^n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+(2^n-k)\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)}{2^n},$$

de donde

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{1/2^n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{1-k/2^n} \leq \frac{k\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+(2^n-k)\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)}{2^n},$$

lo que implica

$$(a_1a_2\cdots a_k)^{1/2^n}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^{1-k/2^n} \leq \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right),$$

Resolviendo para $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ *da la desigualdad deseada.* ❑

Demostración segunda: *La segunda demostración es también por inducción. Como en la demostración anterior, el caso* $k=2$ *ya se ha establecido en el teorema 446. Póngase*

$$A_k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}, \qquad G_k = (a_1a_2\cdots a_k)^{1/k}.$$

Obsérvese que

$$a_{k+1} = (k+1)A_{k+1} - kA_k.$$

La hipótesis inductiva es $A_k \geq G_k$ *y se quiere demostrar que* $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. *Póngase*

$$A = \frac{a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}}{k}, \qquad G = \left(a_{k+1}A_{k+1}^{k-1}\right)^{1/k}.$$

Por la hipótesis inductiva, $A \geq G$. *Ahora bien,*

$$\frac{A+A_k}{2} = \frac{\dfrac{(k+1)A_{k+1}-kA_k+(k-1)A_{k+1}}{k}+A_k}{2} = A_{k+1}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{A+A_k}{2} \\ &\geq (AA_k)^{1/2} \\ &\geq (GG_k)^{1/2}. \\ &= \left(G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}\right)^{1/2k} \end{aligned}$$

Se ha establecido que

$$A_{k+1} \geq \left(G_{k+1}^{k+1}A_{k+1}^{k-1}\right)^{1/2k} \implies A_{k+1} \geq G_{k+1},$$

lo cual completa la inducción. ❑

Demostración tercera: *La tercera demostración depende de la noción de continuidad. Se hará una serie de substituciones que conservarán la suma*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

pero que incrementarán el producto

$$a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Al final se verá que todas las a_i serán iguales y que su media aritmética A será igual a su media geométrica G. Si todas las a_i fuesen $> A$ entonces $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > \frac{nA}{n} = A$, lo cual es imposible. De igual manera, las a_i no pueden ser todas $< A$. Luego deben de haber dos subíndices i, j, tales que $a_i < A < a_j$. Póngase $a_i' = A$, $a_j' = a_i + a_j - A$. Obsérvese que $a_i + a_j = a_i' + a_j'$, de donde reemplazar las a's originales con las a's primas no altera la media aritmética. Por otra parte,

$$a_i'a_j' = A(a_i + a_j - A) = a_i a_j + (a_j - A)(A - a_i) > a_i a_j$$

ya que $a_j - A > 0$ y $A - a_i > 0$.

Nótese ahora que hay a lo sumo n a's que reemplazar. El procedimiento terminará eventualmente logrando igualar a todas las a's a la media aritmética e incrementando a la media geométrica. Habrá desigualdad estricta si al menos dos de las a's son desiguales. ❑

483 Ejemplo Sea $f(x) = (a+x)^5(a-x)^3$, $x \in [-a;a]$. Hallar el valor máximo de f por medio de la desigualdad de la media.

►**Resolución:** *Si $x \in [-a;a]$, entonces $a+x \geq 0$ y $a-x \geq 0$, por lo tanto se puede utilizar la desigualdad de las medias con $n = 8$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_5 = \frac{a+x}{5}$ y $a_6 = a_7 = a_8 = \frac{a-x}{3}$. Se deduce que*

$${\frac{a+x}{5}}^{5}\,{\frac{a-x}{3}}^{3} \leq \left(\frac{5\,\frac{a+x}{5} + 3\,\frac{a-x}{3}}{8}\right)^{8} = {\frac{a}{4}}^{8},$$

de donde

$$f(x) \leq \frac{5^5 3^3 a^8}{4^8},$$

en donde se satisface la igualdad si y sólo si $\frac{a+x}{5} = \frac{a-x}{3}$. ◄

484 Ejemplo Para todo entero $n > 1$ se tiene

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < n^n,$$

ya que por la desigualdad de las medias,

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) < \left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n}\right)^n = n^n.$$

Obsérvese que como los factores son desiguales habrá desigualdad estricta.

485 Ejemplo La sucesión $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n = 1,2,\ldots$ es estrictamente creciente. De hecho, el conjunto de $n+1$ números

$$1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n},$$

tiene media aritmética

$$1+\frac{1}{n+1}$$

y media geométrica

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)}.$$

Por lo tanto,

$$1+\frac{1}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)},$$

esto es

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

o

$$x_{n+1} > x_n,$$

demostrando la aserción.

486 Ejemplo Hallar el volumen de la caja rectangular mayor con lados paralelos a los ejes que se pueda inscribir en el elipsoide

$$\frac{x}{a}^{2} + \frac{y}{b}^{2} + \frac{z}{c}^{2} = 1.$$

Aquí, $a > 0, b > 0, c > 0$.

►**Resolución:** *Sean* $2x, 2y, 2z$ *las dimensiones de esta caja. Se quiere maximizar* $8xyz$*. Poniendo* $n = 3, x_1 = \frac{x^2}{a^2}$, $x_2 = \frac{y^2}{b^2}$, $x_3 = \frac{z^2}{c^2}$, *en la desigualdad de las medias, se tiene*

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}\frac{z^2}{c^2} = x_1x_2x_3 \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3}^{3} = \frac{1}{27}.$$

Por lo tanto, el volumen máximo es

$$8xyz \leq \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

◄

487 Definición Dados los reales $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$, su *media armónica* está dada por

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Como colorario al teorema de las medias se obtiene

488 Corolario (Desigualdad de las medias armónica y geométrica) Considérense los reales $b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0$. Entonces

$$\frac{n}{\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}} \leq (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n}.$$

Demostración: *Esto se sigue en poniendo* $a_k = \dfrac{1}{b_k}$ *en el teorema 482. Entonces,*

$$\left(\frac{1}{b_1}\frac{1}{b_2}\cdots\frac{1}{b_n}\right)^{1/n} \leq \frac{\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}}{n}.$$

❑

Combinando el teorema 482 y el corolario 488, se deduce

489 Corolario (Desigualdad de las medias armónica, geométrica y aritmética) Sean $b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_n > 0$. Entonces

$$\frac{n}{\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}} \leq (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}.$$

490 Ejemplo Sea $a_k > 0$ y póngase $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{s-a_k} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

y que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} \geq \frac{n}{n-1}.$$

►**Resolución:** *Póngase* $b_k = \dfrac{s}{s-a_k}$. *Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s-a_k}{s} = n-1$$

y por el corolario 489,

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{s}{s-a_k}}{n},$$

demostrando la primera desigualdad.

Como $\dfrac{s}{s-a_k} - 1 = \dfrac{a_k}{s-a_k}$, *se tiene*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{s}{s-a_k} - 1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{s}{s-a_k}\right) - n \\
&\geq \frac{n^2}{n-1} - n \\
&= \frac{n}{n-1},
\end{aligned}$$

demostrando la segunda desigualdad. ◀

Tarea

491 Problema Demostrar que si $n > 1$ es un entero,

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

492 Problema Sean a, b, c, d reales estrictamente positivos satisfaciendo $abcd = 1$. Demostrar que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

493 Problema Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

494 Problema Sean a, b, c reales positivos. Demostrar que

$$(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

495 Problema Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ reales estrictamente positivos, satisfaciendo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(1 - a_k) \leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

496 Problema Sean a, b, reales con $a \neq 0$. Demostrar que

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}.$$

497 Problema Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ reales estrictamente positivos satisfaciendo $a_1 a_2 ... a_n = 1$. Demostrar que

$$\prod_{i=1}^{n} (2 + a_i) \geq 3^n.$$

498 Problema Sea $n > 1$ un entero, $x_1, x_2, ..., x_n$ reales estrictamente positivos y $a_1, a_2, ..., a_n$ reales positivos. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(s - x_k)}{x_k} \geq n(n-1)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

499 Problema Sean x, y, z números reales estrictamente positivos satisfaciendo $x + y + z = 1$. Demuéstrese que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

500 Problema Sea $n \geq 2$ un entero y $x_1, x_2, ..., x_n$ reales estrictamente positivos satisfaciendo $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Determinar el valor mínimo de

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}.$$

501 Problema Sean a, b, c, d reales positivos satisfaciendo $a + b + c + d = 1$. Demostrar que

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} abcd.$$

6.4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky

502 Teorema (Identidad de Lagrange) Sean a_k, b_k números reales. Entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Demostración: *Como para $j = k$ se tiene $a_k b_j - a_j b_k = 0$, se puede relajar la estrictura de la desigualdad en la última suma. Ahora bien,*

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2 &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} (a_k^2 b_j^2 - 2a_k b_k a_j b_j + a_j^2 b_k^2) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_k^2 b_j^2 - 2 \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_k b_k a_j b_j + \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} a_j^2 b_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k^2 b_j^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2,
\end{aligned}$$

demostrando el teorema. ❑

503 Teorema (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz) Sean x_k, y_k números reales, $1 \leq k \leq n$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2},$$

con igualdad si y sólo si se cumple la proporción

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

para alguna constante real t.

Demostración primera: *La desigualdad sigue de inmediato de la identidad de Lagrange,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (x_k y_j - x_j y_k)^2$$

(teorema 502), ya que $\sum_{1 \leq k < j \leq n} (x_k y_j - x_j y_k)^2 \geq 0$. ❑

Demostración segunda: *Póngase* $a = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, $b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ *y* $c = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$. *Considérese el polinomio cuadrático*

$$at^2 + bt + c = t^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2t \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (tx_k - y_k)^2 \geq 0,$$

en donde se tiene desigualdad porque se suman cuadrados de números reales. Luego este polinomio cuadrático es positivo para todo real t de donde se desprende que tiene raíces complejas y su discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Así,

$$4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

dando la desigualdad deseada. ❑

Demostración tercera: *Gracias al corolario 456,*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= \frac{x_1^2 y_1^2}{y_1^2} + \frac{x_2^2 y_2^2}{y_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2 y_n^2}{y_n^2} \\ &\geq \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2}{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada.❑

Demostración cuarta: *La desigualdad es obvia si* $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0$, *así que presúmase al contrario. Utilizando la desigualdad del triángulo y la desigualdad de la media,*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2}} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}} \cdot \frac{|y_k|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \frac{y_k^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad requerida. ❑

504 Ejemplo Demostrar que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son números reales estrictamente positivos, entonces

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

►**Resolución:** *Por CBS,*

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) &\geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \\ &= n^2.\end{aligned}$$

◄

505 Ejemplo (USAMO 1978) Sean a, b, c, d, e reales satisfaciendo

$$a + b + c + d + e = 8, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Maximizar el valor de e.

►**Resolución:** *Por CBS,*

$$(a + b + c + d)^2 \leq (1 + 1 + 1 + 1)\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = 4\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right).$$

De aquí,

$$(8 - e)^2 \leq 4\left(16 - e^2\right) \iff e(5e - 16) \leq 0 \iff 0 \leq e \leq \frac{16}{5}.$$

El valor máximo $e = \frac{16}{5}$ *es alcanzado cuando* $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

◄

506 Ejemplo Hallar todos los reales positivos

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

satisfaciendo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 96, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 144, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = 216.$$

►**Resolución:** *Obsérvese que* $96 \cdot 216 = 144^2$ *y por CBS,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Como hay igualdad

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = t(a_1^3, a_2^3, \ldots, a_n^3)$$

para algún real t. *Así* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, *de donde* $na = 96$, $na^2 = 144$ *resulta en* $a = \frac{3}{2}$ *y* $n = 32$. ◄

507 Teorema (Desigualdad de Minkowski) Sean x_k, y_k números reales. Entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1/2}.$$

Demostración: *Se tiene,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}x_k^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)^{1/2}\right)^2,\end{aligned}$$

donde la desigualdad deseada se sigue por CBS.❑

Tarea

508 Problema Si $a_k,b_k,c_k,k=1,\ldots,n$, son reales positivos, demuéstrese que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\right)^4\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^4\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)^2.$$

509 Problema Sea $x_i\geq 0$ para $1\leq i\leq n$. Demostrar que

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leq\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\right)^{1/2},$$

con igualdad si y sólo si $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

510 Problema Sea $n\geq 3$ un entero y considérese reales estrictamente positivos $a_1,a_2,\ldots,a_n$, tales que

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^2>(n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4\right).$$

Demostrar que para todo trío i,j,k, dos a dos distintos, los números a_i,a_j,a_k son las longitudes de los lados de un triángulo.

511 Problema Sean a,b,c,d números reales estrictamente positivos tales que $a^2+b^2=\left(c^2+d^2\right)^3$. Demostrar que

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\geq 1.$$

512 Problema Sean $x>1,y>1,z>1$ tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Demostrar que

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

513 Problema Sean x,y,z números reales estrictamente positivos tales que $xyz\geq xy+yz+zx$. Demostrar que

$$xyz\geq 3(x+y+z).$$

514 Problema Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reales estrictamente positivos. Póngase $S_1=\sum_{i=1}^{n}a_i$ y $S_2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$. Demuéstrese que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_2-a_k^2}{S_1-a_k}\geq S_1.$$

6.5 Desigualdad del reordenamiento

515 Definición Dado un conjunto de números reales $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, denótese por

$$\check{x}_1\geq\check{x}_2\geq\cdots\geq\check{x}_n$$

el reordenamiento decreciente de las x_i y por

$$\hat{x}_1\leq\hat{x}_2\leq\cdots\leq\hat{x}_n$$

el reordenamiento creciente de las x_i.

516 Definición Dadas dos sucesiones de números reales $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ y $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ de la misma longitud n, se dice que ´son *similarmente sorteadas* si ambas son crecientes o si ambas son decrecientes. Se dice que son *diferentemente sorteadas* si una es creciente y la otra es decreciente.

517 Ejemplo Las sucesiones $1\leq 2\leq\cdots\leq n$ and $1^2\leq 2^2\leq\cdots\leq n^2$ son similarmente sorteadas, mientras que las sucesiones $\frac{1}{1^2}\geq\frac{1}{2^2}\geq\cdots\geq\frac{1}{n^2}$ y $1^3\leq 2^3\leq\cdots\leq n^3$ son diferentemente sorteadas.

518 Teorema (Desigualdad del reordenamiento) Dados números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ se tiene

$$\sum_{1\leq k\leq n} \check{a}_k\hat{b}_k \leq \sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k \leq \sum_{1\leq k\leq n} \hat{a}_k\hat{b}_k.$$

Así la suma $\sum_{1\leq k\leq n} a_k b_k$ se minimiza cuando las sucesiones son diferentemente sorteadas y se maximiza cuando las sucesiones son similarmente sorteadas.

☞ *Obsérvese que*

$$\sum_{1\leq k\leq n} \hat{a}_k\hat{b}_k = \sum_{1\leq k\leq n} \check{a}_k\check{b}_k.$$

Demostración: *Sea $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ un reordenamiento de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si hay dos subíndices i, j, tales que las sucesiones halan en direcciones opuestas, por ejemplo $a_i > a_j$ y $b_{\sigma(i)} < b_{\sigma(j)}$, entonces considérese las sumas*

$$\begin{aligned} S &= a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_i b_{\sigma(i)} + \cdots + a_j b_{\sigma(j)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \\ S' &= a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_i b_{\sigma(j)} + \cdots + a_j b_{\sigma(i)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

Entonces

$$S' - S = (a_i - a_j)(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) > 0.$$

Esta última desigualdad demuestra que mientras más cerca estén las a's y las b's de halar en la misma dirección, mayor será la suma. Esto demuestra el resultado. ❑

519 Ejemplo Dar una demostración de la desigualdad de las medias utilizando la desigualdad del reordenamiento. Esto es, si $a_1, \ldots, a_n$ son reales positivos, demuéstrese que

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

con igualdad si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n$.

►**Resolución:** *Si alguna de las a_k es cero, no hay nada que demostrar. Presúmase pues que todas son estrictamente positivas. Póngase*

$$x_1 = \frac{a_1}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}}, \quad x_2 = \frac{a_1 a_2}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{2/n}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{n/n}} = 1,$$

y

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{1}{x_n} = 1.$$

Obsérvese que para $2 \leq k \leq n$,

$$x_k y_{k-1} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{k/n}} \cdot \frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{(k-1)/n}}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} = \frac{a_k}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}}.$$

Las x_k y las y_k son diferentemente sorteadas, y en virtud de la desigualdad de reordenamiento,

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \cdots + 1 &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ &\leq x_1 y_n + x_2 y_1 + \cdots + x_n y_{n-1} \\ &= \frac{a_1}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}} + \frac{a_2}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}} + \cdots + \frac{a_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}}, \end{aligned}$$

o sea,

$$n \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}},$$

de donde se obtiene el resultado. ◀

520 Ejemplo Minimizar $f : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$ sobre $\ 0\,;\frac{\pi}{2}\ $.

▶**Resolución:** *Sea* $x \in\ 0\,;\frac{\pi}{2}\ $ *. Las sucesiones* $\left(\sin^3 x, \cos^3 x\right)$ *y* $\left(\frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\sin x}\right)$ *son similarmente sorteadas. Así pues, por la desigualdad del reordenamiento,*

$$f(x) \geq \sin^3 x \frac{1}{\sin x} + \cos^3 x \frac{1}{\cos x} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Por otra parte,

$$f\ \frac{\pi}{4}\ = 1.$$

Luego, el mínimo deseado es 1. ◀

521 Ejemplo Demostrar que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

▶**Resolución:** *Sin pérdida de generalidad, supóngase que* $a \geq b \geq c$. *Entonces* $a \geq b \geq c$ *es similarmente sorteada que ella misma, y así por la desigualdad del reordenamiento,*

$$a^2 + b^2 + c^2 = aa + bb + cc \geq ab + bc + ca.$$

La desigualdad deseada también se sigue de inmediato de la identidad

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2.$$

Se puede también utilizar la desigualdad de las medias tres veces

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad b^2 + c^2 \geq 2bc; \quad c^2 + a^2 \geq 2ca,$$

y sumar. ◀

522 Ejemplo Demostrar que si $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, con $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \max(a^2 b + b^2 c + c^2 a, a^2 c + b^2 a + c^2 b),$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{2}\left(a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\right).$$

▶**Resolución:** *Sin pérdida de generalidad, supóngase que* $a \geq b \geq c$. *Entonces* $a \geq b \geq c$ *es similarmente sorteado con* $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ *y en virtud de la desigualdad del reordenamiento,*

$$a^3 + b^3 + c^3 = aa^2 + bb^2 + cc^2 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a,$$

y

$$a^3 + b^3 + c^3 = aa^2 + bb^2 + cc^2 \geq a^2 c + b^2 a + c^2 b.$$

Sumando,

$$a^3+b^3+c^3 = aa^2+bb^2+cc^2 \geq \frac{1}{2}\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right).$$

Otra vez, si $a \geq b \geq c$ entonces

$$ab \geq ac \geq bc,$$

y así

$$a^3+b^3+c^3 =\geq a^2b+b^2c+c^2a = (ab)a+(bc)b+(ac)c \geq (ab)c+(bc)a+(ac)b = 3abc.$$

Esta última desigualdad también resulta de la desigualdad de las medias ya que

$$(a^3b^3c^3)^{1/3} \leq \frac{a^3+b^3+c^3}{3},$$

u otra vez, de la identidad

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

y la identidad del ejemplo 521. ◀

523 Ejemplo (Desigualdad de Chebyshev) Dados reales $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ y $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ prove that

$$\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} \breve{a}_k\hat{b}_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} b_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} \hat{a}_k\hat{b}_k.$$

►**Resolución:** *Se aplica la desigualdad del reordenamiento n veces:*

$$\begin{array}{rclcl}
\breve{a}_1\hat{b}_1+\breve{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\breve{a}_n\hat{b}_n & \leq & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & \leq & \hat{a}_1\hat{b}_1+\hat{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\hat{a}_n\hat{b}_n \\
\breve{a}_1\hat{b}_1+\breve{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\breve{a}_n\hat{b}_n & \leq & a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1 & \leq & \hat{a}_1\hat{b}_1+\hat{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\hat{a}_n\hat{b}_n \\
\breve{a}_1\hat{b}_1+\breve{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\breve{a}_n\hat{b}_n & \leq & a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2 & \leq & \hat{a}_1\hat{b}_1+\hat{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\hat{a}_n\hat{b}_n \\
 & & \vdots & & \\
\breve{a}_1\hat{b}_1+\breve{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\breve{a}_n\hat{b}_n & \leq & a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1} & \leq & \hat{a}_1\hat{b}_1+\hat{a}_2\hat{b}_2+\cdots+\hat{a}_n\hat{b}_n
\end{array}$$

Sumando se obtiene la desigualdad deseada.

◀

524 Ejemplo (Desigualdad de Nesbitt) Sean a,b,c reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

►**Resolución:** *Presúmase que $a \geq b \geq c$. Póngase $s = a+b+c$. Entonces*

$$-a \leq -b \leq -c \implies s-a \leq s-b \leq s-c \implies \frac{1}{s-a} \geq \frac{1}{s-b} \geq \frac{1}{s-c}$$

y por tanto las sucesiones a,b,c y $\frac{1}{s-a},\frac{1}{s-b},\frac{1}{s-c}$ están similarmente sorteadas. Usando la desigualdad del reordenamiento dos veces,

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c} \geq \frac{a}{s-c}+\frac{b}{s-a}+\frac{c}{s-b}; \qquad \frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c} \geq \frac{a}{s-b}+\frac{b}{s-c}+\frac{c}{s-a}.$$

Sumando estas dos desigualdades,

$$2\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right) \geq \frac{b+c}{s-a}+\frac{c+a}{s-b}+\frac{c+a}{s-c},$$

de donde

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq 3,$$

estableciendo el resultado. ◀

Tarea

525 Problema (IMO, 1978) Sea a_k, $1 \leq k \leq n$ una sucesión de enteros distintos estrictamente positivos. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

526 Problema Sean a,b,c,d reales positivos, satisfaciendo $ab+bc+cd+da=1$. Demostrar que

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

527 Problema (IMO 1975) Sean $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, y $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ números reales. Considérese una permutación $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ de $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2.$$

528 Problema Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

529 Problema Sean a,b,c reales estrictamente positivos y sea et $n>0$ un entero. Demostrar que

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

530 Problema Sean $x_1,x_2,\ldots,x_n$ reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\ldots x_n^{x_n} \geq (x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}.$$

531 Problema (IMO 1998) Sean x,y,z reales estrictamente positivos tales que $xyz=1$. Demostrar que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Chapter 7

Geometría plana

Se intentará aquí recoger una cantidad de resultados y métodos útiles para resolver problemas de tipo concurso en Geometría. Una gran parte de estos resultados son clásicos y se estudiarán con métodos clásicos: esto es, sin introducir las nociones de distancia o distancia dirigida. A algunos resultados se darán múltiples demostraciones, para evidenciar la utilidad de diversos puntos de vista. Se utilizarán tanto métodos sintéticos, como vectoriales, analíticos y trigonométricos.

El deseo no es de dar una presentación rigurosa y axiomática de la Geometría, sino más bien, presentar una serie de resultados útiles para la resolución de problemas tipo olimpíada. Por tanto, la progresión de tópicos no será necesariamente lineal.

7.1 Ángulos

Se supondrán por conocidas las nociones elementales de *punto, recta, rayo, plano y segmento de recta.* Los puntos generalmente se denotarán por mayúsculas, e.g. P, Q, etc. Las rectas generalmente se denotarán por mayúsculas con flechas supra, e.g. $\overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{M}$. La recta que contiene los puntos A y B se denotará por $\overleftrightarrow{AB}$. El segmento de recta con punto inicial A y punto final B se denotará por $[AB]$ y su *longitud* o distancia positiva entre A y B por AB, notando que $AB = BA$. El rayo con punto inicial A y que pasa por B se denotará por $[AB[$.

532 Definición Se dirá que dos figuras son *congruentes*, si coinciden cuando una es sobreimpuesta a la otra.

533 Presunción Dos puntos distintos determinan una recta única.

Figure 7.1: Un punto.

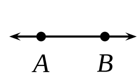


Figure 7.2: Una recta.

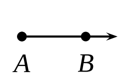


Figure 7.3: Un rayo.

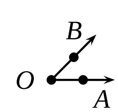


Figure 7.4: Ángulo.

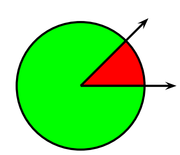


Figure 7.5: Ángulos convexo (en rojo) y cóncavo (en verde).

534 Presunción Dado un punto y una recta, o bien el punto yace sobre la recta, o bien el punto no yace sobre la recta.

535 Presunción Dos puntos yacen sobre una recta única.

536 Presunción Dos rectas sobre el mismo plano o bien se intersecan en un punto único o bien no se intersecan, en cuyo caso se denominan *paralelas*. Si la recta $\overleftrightarrow{L}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{L'}$ se escribirá $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{L'}$.

537 Presunción El paralelismo es una relación de equivalencia, esto es,

- es reflexiva, ya que toda recta es paralela a sí misma,
- es simétrica, ya que si una recta es paralela a otra, la otra lo es a la primera y
- es transitiva, ya que si una recta es paralela a una segunda recta, y esta a otra tercera recta, la primera lo es a la tercera.

538 Presunción Dado un punto P y una recta L que no contenga a P, existe una recta única L' que contiene a P y que satisface $L \parallel L'$.

539 Definición (Puntos colineales) Tres puntos o más puntos se dicen *colineales* si yacen en la misma recta.

540 Presunción (Relación de Chasles) Si A, B, C son tres puntos colineales y si B está entre A y C entonces

$$AC = AB + BC.$$

541 Definición (Rectas concurrentes) Tres o más rectas se dicen concurrentes si pasan por un punto en común.

542 Definición (Ángulo) Sean $[OA[$ y $[OB[$ dos rayos de origen común O. La región barrida por el rayo $[OA[$ cuando este gira sobre el vértice O hasta llegar al rayo $[OB[$ se denomina *ángulo dirigido* y se denota por $\widehat{([OA[, [OB[)}$. También se utiliza la notación $\widehat{AOB}$ o O.

> ☞ *Como el rayo inicial puede tanto girar en sentido levógiro como en sentido dextrógiro, hay ambigüedad al nombrar ángulos. Así pues la misma notación se puede utilizar tanto para nombrar el ángulo convexo o cóncavo. La mayoría de las veces la notación se referirá al ángulo producido cuando el rayo inicial viaja en sentido levógiro, pero en caso contrario se harán notar las excepciones con el símbolo ↻. Véase la figura 7.5.*

Se utilizará tanto el *grado* como el *radián* para medir ángulos. Recuerdése que se verifica la identidad

$$\frac{A}{180} = \frac{r}{\pi}, \tag{7.1}$$

en donde A es la medida del ángulo en grados $^\circ$ y r es la medida del ángulo en radianes. Se utilizará la misma notación para denotar tanto a un ángulo como a su medida.

543 Definición (Ángulo adyacente) Si el rayo $[OB[$ está entre los rayos $[OA[$ y $[OB[$, se dice que los ángulos $\widehat{([OA[, [OB[)}$ y $\widehat{([OB[, [OC[)}$ son *adyacentes* y se cumple

$$\widehat{([OA[, [OC[)} = \widehat{([OA[, [OB[)} + \widehat{([OB[, [OC[)}.$$

544 Definición (Revolución) Una *revolución* es el ángulo obtenido al rotar un rayo hasta que yaga otra vez sobre sí mismo. Mide 360° o 2π radianes.

545 Definición (Ángulo llano) Un *ángulo llano* es el ángulo formado por un rayo y el rayo con el mismo punto inicial pero viajando en dirección opuesta. Mide 180° o π radianes.

546 Definición (Ángulo recto) Un *ángulo recto* es la mitad de un ángulo llano. Mide 90° o $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

547 Definición (Ángulo agudo) Un *ángulo agudo* es aquél que mide menos que un ángulo recto.

548 Definición (Ángulo obtuso) Un *ángulo obtuso* es aquél que mide más que un ángulo recto pero menos que un ángulo llano.

549 Definición (Ángulo reflejo) Un *ángulo reflejo* es aquél que mide más que un ángulo llano.

550 Definición (Ángulo complementario) Dos ángulos se dicen *complementarios* si la suma de sus medidas es un ángulo recto.

551 Definición (Ángulo suplementario) Dos ángulos se dicen *suplementarios* si la suma de sus medidas es un ángulo llano.

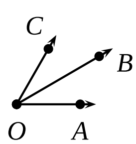


Figure 7.6: Ángulos adyacentes.

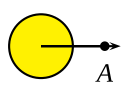


Figure 7.7: Revolución.

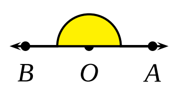


Figure 7.8: Ángulo llano.

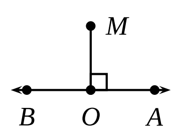


Figure 7.9: Ángulo recto.

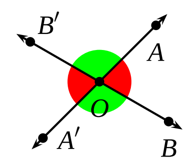


Figure 7.10: Ángulos opuestos por el vértice.

☞ *Es evidente que si un ángulo recto se descompone en dos ángulos adyacentes, el uno es suplementario al otro. Recíprocamente, si dos ángulos adyacentes son suplementarios, entonces forman un ángulo recto.*

552 Definición (Ángulos opuestos por el vértice) Cada par de ángulos opuestos cuando dos rectas se intersecan se llaman *ángulos opuestos por el vértice.*

553 Teorema Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Demostración: *Véase la figura 7.1. Por formar ángulos llanos adyacentes,*

$$\widehat{AOB}+\widehat{B'OA}=\pi=\widehat{B'OA}+\widehat{A'OB'} \implies \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}.$$

❑

Si dos rectas se cortan y uno de los ángulos en el corte es recto, entonces todos los demás serán ángulos rectos, en virtud del teorema 7.1. De aquí la siguiente definición.

554 Definición (Rectas perpendiculares) Dos rectas L y L' se dicen *perpendiculares*, denotado por $L \perp L'$, si el ángulo entre ellas es recto.

555 Definición (Transversal) Una *transversal* es una recta que cruza a otras dos o más rectas. Estas últimas rectas pueden ser o no paralelas.

556 Definición (Ángulos correspondientes) Ángulos homólogos en rectas cortadas por una transversal son llamados *ángulos correspondientes*. Véase a figura 7.11.

557 Definición (Ángulos alternos internos) Ángulos entre rectas cortadas por una transversal y en lados opuestos de la transversal son llamados *ángulos alternos internos*. Véase a figura 7.12.

558 Definición (Ángulos alternos externos) Ángulos fuera de rectas cortadas por una transversal y en lados opuestos de la transversal son llamados *ángulos alternos externos*. Véase a figura 7.13.

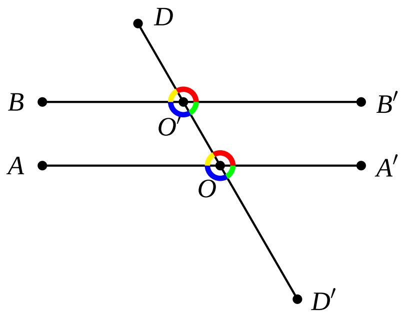


Figure 7.11: Ángulos correspondientes.

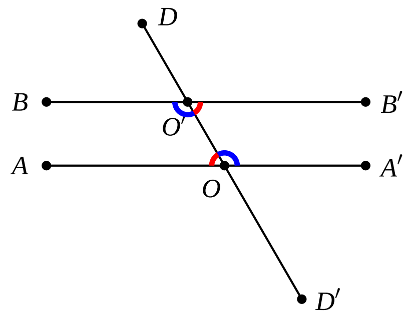


Figure 7.12: Ángulos alternos internos.

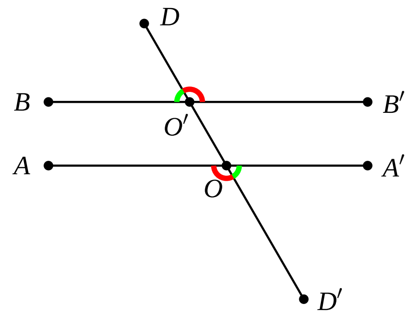


Figure 7.13: Ángulos alternos externos.

Se presumirá que el lector conoce los siguientes resultados.

559 Presunción Si una transversal corta a dos paralelas, lo ángulos correspondientes son congruentes. Recíprocamente, si una transversal cortare dos rectas y si los ángulos correspondientes fueren congruentes, entonces las rectas cortadas son paralelas.

560 Presunción Si una transversal corta a dos paralelas, lo ángulos alternos externos son congruentes. Recíprocamente, si una transversal cortare dos rectas y si los ángulos alternos externos fueren congruentes, entonces las rectas cortadas son paralelas.

561 Presunción Si una transversal corta a dos paralelas, lo ángulos alternos internos son congruentes. Recíprocamente, si una transversal cortare dos rectas y si los ángulos alternos internos fueren congruentes, entonces las rectas cortadas son paralelas.

562 Definición (Triángulo) Un *triángulo* es una figura en el plano, obtenida al unir, por segmentos de recta, tres puntos no alineados en el plano. Un triángulo se dice *isósceles* si dos de sus lados tienen la misma longitud, y *equilátero* si su tres lados tienen la misma longitud

563 Definición Un *triángulo rectángulo* es aquél que posee un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*, y los otros dos lados *catetos*.

Se presumirá conocido lo siguiente.

564 Presunción Si un triángulo es isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. Recíprocamente, si dos de los ángulos de un triángulo son congruentes, el triángulo es isósceles. Un triángulo equilátero es equiángulo, esto es, cada uno de sus tres ángulos mide $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

Dado un triángulo $\triangle ABC$, sus ángulos interiores $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$, se denotarán, respectivamente, por A, B y C, o a veces, por letras griegas, α, β, γ.

565 Teorema La suma de los ángulos internos de un triángulo es un ángulo llano (180° o π radianes).

Demostración: *Constrúyase por A una recta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Para simplificar la nomenclatura, presúmase que el punto X está sobre esta recta, a la izquierda de A, y el punto Y está sobre esta recta, a la derecha de A, como en la figura 7.15. Por ser ángulos alternos externos a rectas paralelas,*

$$\widehat{XAB} = B, \quad \widehat{YAC} = C.$$

Por ser ángulos adyacentes en una línea recta

$$\pi = \widehat{XAB} + A + \widehat{YAC} = B + A + C,$$

como se quería demostrar. ❑

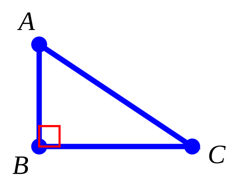


Figure 7.14: Triángulo $\triangle ABC$ rectángulo en B. $[AC]$ es la hipotenusa. $[BC]$ y $[AB]$ son los catetos.

566 Definición (Ángulos exteriores de un triángulo) Un *ángulo exterior o externo* de un triángulo es el ángulo suplementario formado al extender un lado del triángulo. Véase la figura 7.16.

La siguiente aserción es obvia.

567 Teorema La medida de un ángulo exterior de un triángulo es la suma de las medidas de los dos ángulos internos opuestos del triángulo.

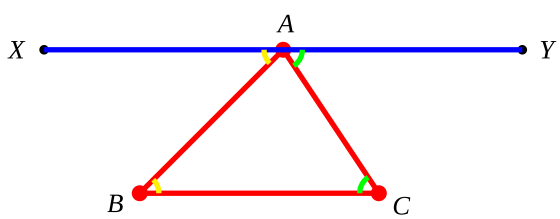


Figure 7.15: Teorema 565.

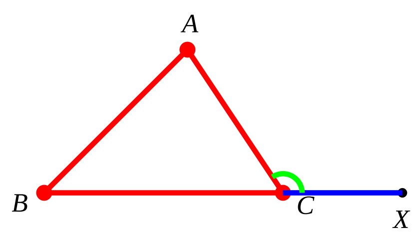


Figure 7.16: Un ángulo externo.

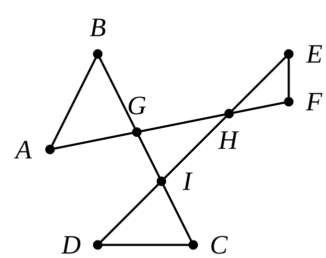


Figure 7.17: Ejemplo 568.

568 Ejemplo Hallar la suma de ángulos de los vértices

$$A + B + C + D + E + F$$

en la figura 7.17.

►**Resolución:** *Añádanse los vértices G, H, e I, como se muestra en la figura. Por ser ángulos opuestos por el vértice, G, H, e I son también los ángulos internos del triángulo en el centro, luego pues se tiene*

$$A+B+G=\pi,\quad C+D+I=\pi,\quad E+F+\widehat{H}=\pi,\quad G+\widehat{H}+I=\pi,$$

y así

$$A+B+C+D+E+F+G+\widehat{H}+I=3\pi,$$

de donde

$$A+B+C+D+E+F=3\pi-\pi=2\pi.$$

◄

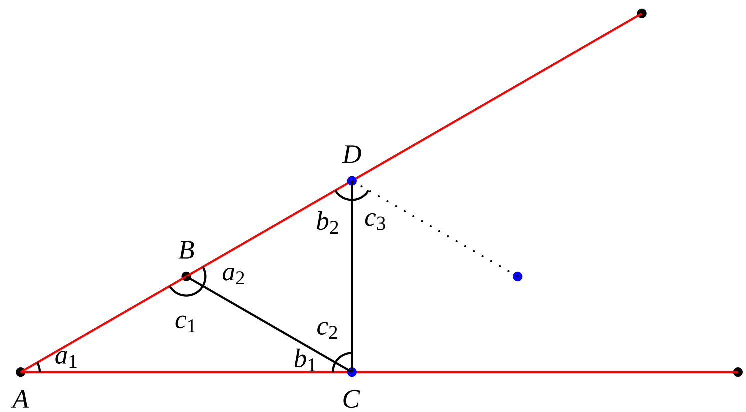


Figure 7.18: Ejemplo 569.

569 Ejemplo Se construye una sucesión de triángulos isósceles, comenzando con $AB=BC$, luego $BC=CD$, etc., tal como en la figura 7.18. Si $\widehat{BAC}=x>0$, demostrar que tan sólo se puede construir

$$\left\lfloor \frac{\pi}{2x} \right\rfloor$$

triángulos.

►**Resolución:** *Sea n el número de tales triángulos que puede ser construido. Considérese la figura . Sea $a_1=x$. Como los triángulos han de ser isósceles, $b_1=a_1=x$. Esto conlleva a $c_1=\pi-a_1-b_1$ y así*

$$\begin{aligned}
a_2 &= \pi-c_1=2x,\\
b_2 &= a_2=2x,\\
c_2 &= \pi-a_2-b_2=\pi-4x,\\
a_3 &= \pi-b_1-c_2=3x,\\
b_3 &= 3x,\\
&\vdots\\
a_n &= nx\\
b_n &= nx.
\end{aligned}$$

En otras palabras, el enésimo triángulo tiene dos ángulos iguales a nx. Se puede construir triángulos en tanto $2nx < \pi$, de donde

$$n = \left\lfloor\!\left\lfloor \frac{\pi}{2x} \right\rfloor\!\right\rfloor.$$

◀

570 Definición (Cuadrilátero) Un *cuadrilátero* es una figura en el plano obtenida al unir cuatro puntos, no tres de ellos alineados. El cuadrilátero es *simple* si sus lados no se cruzan. Es *convexo* si para cada dos puntos dentro del cuadrilátero, el segmento de recta uniéndolos está dentro del cuadrilátero.

☞ *De ahora en adelante, la palabra* cuadrilátero *tan sólo denotará la noción de* cuadrilátero simple, *a menos que se indique lo contrario.*

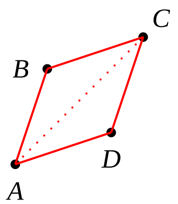


Figure 7.19: Cuadrilátero simple y convexo.

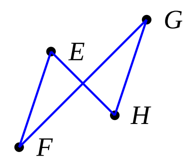


Figure 7.20: Cuadrilátero no simple.

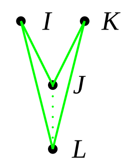


Figure 7.21: Cuadrilátero no convexo.

571 Teorema La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero simple es dos ángulos llanos (360° o 2π radianes).

Demostración: *De la figura 7.19, vemos que si el cuadrilátero es convexo, entonces se puede elegir un vértice y conectarlo con otro vértice no consecutivo, creando una diagonal y dos triángulos. Si el cuadrilátero es simple, pero no convexo, como en la figura **??**, entonces deberá tener un ángulo reflejo. Desde el vértice de este ángulo reflejo se traza una diagonal, creando así dos triángulos. Luego, en cada caso, la suma de los ángulos es la de dos triángulos, esto es, 2π o 360°.* ❑

572 Definición (Polígono) Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n puntos distintos en el plano, ninguno trío de entre ellos en línea recta. La figura de n lados $P_1P_2 \ldots P_n$ obtenida al unir P_k con P_{k+1}, $k < n$ y P_n con P_1, se denomina *polígono*. El polígono es *simple* si sus lados no se cruzan. Es *convexo* si para cada dos puntos dentro del polígono, el segmento de recta uniéndolos está dentro del polígono.

☞ *De ahora en adelante, la palabra* polígono *tan sólo denotará la noción de* polígono simple, *a menos que se indique lo contrario.*

573 Teorema La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es $n-2$ ángulos llanos ($(n-2)180^\circ$ o $(n-2)\pi$ radianes).

Demostración: *Por inducción. Para $n = 3$ esto es el teorema 565. Presúmase primero que el polígono es convexo. Elíjase cualquier vértice y únase a este vértice con los otros $n-2$ vértices que no inciden en él. De esta manera se han formado $n-2$ triángulos, y así, la suma de los ángulos interiores del polígono es la suma de los ángulos de estos $n-2$ triángulos, es decir, $(n-2)\pi$.*

Presúmase ahora que el polígono es simple, pero no convexo. Entonces al menos uno de sus vértices tiene un ángulo reflejo, ya que el polígono no es convexo. Un rayo emanando desde este vértice deberá chocar con otro *vértice creando una diagonal interior, porque de otro modo el polígono tendría área infinita. Esta diagonal divide al polígono en dos sub-polígonos. O bien ambos sub-polígonos son convexos, en cuyo caso ya se termina la demostración por inducción, o bien, al menos uno de ellos no lo es. En el último caso, se divide a este sub-polígono en dos regiones, etc. Este procedimiento deberá terminar eventualmente en formando un triángulo, ya que el número de vértices es finito.* ❑

Segunda demostración: *Sean θ_k, $1 \leq k \leq n$ las medidas de los ángulos internos del polígono. Al viajar en sentido dextrógiro por el perímetro del polígono, comenzando desde un punto que no es un vértice, se hace un giro de $\pi - \theta_k$ una vez pasado el k-ésimo vértice. Cuando se llega al punto original, se ha dado una revolución completa. Así*

$$\sum_{k=1}^{n} (\pi - \theta_k) = 2\pi \implies \sum_{k=1}^{n} \theta_k = \pi(n-2).$$

❑

574 Definición (Ángulos externos de un polígono) Si se extiende un un lado de un polígono simple, el ángulo suplementario al ángulo del vértice es el *ángulo externo* del polígono.

La siguiente aserción es evidente, pues al moverse a través de los ángulos exteriores de un polígono se ha dado una revolución.

575 Teorema La suma de los ángulos externos de un polígono de n lados es dos ángulos llanos (360° o 2π radianes).

576 Definición (Polígono regular) Un polígono regular es aquél cuyos lados son congruentes y cuyos ángulos son congruentes.

La siguiente aserción es entonces obvia.

577 Teorema La medida de un ángulo interior de un polígono regular es $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$ o $\dfrac{\pi(n-2)}{n}$ radianes.

578 Ejemplo En la figura adjunta (figura 7.22), $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. Hállese la suma de ángulos

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEF}.$$

►**Resolución:** *Trácese una recta perpendicular a ambas paralelas, como en la figura 7.23. Como la suma de los ángulos interiores de un hexágono es 4π y como $\widehat{FAB} + \widehat{EFA} = \pi$, se tiene*

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEF} = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

◄

579 Definición (Arco) Dos puntos A y B en la circunferencia de un círculo dividen al círculo en dos partes, llamadas *arcos*, denotado por $\widehat{AB}$.

Hay ambigüedad al nombrar arcos. Normalmente se referirá al arco nombrado en sentido levógiro, haciéndose notar salvedades con el símbolo ⟳.

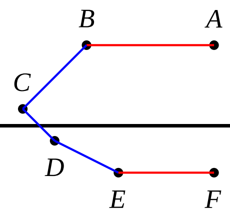


Figure 7.22: Ejemplo 578.

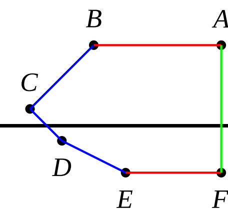


Figure 7.23: Ejemplo 578.

580 Definición (Cuerda) Dados dos puntos en la circunferencia de un círculo, el segmento de recta que los une es llamado *cuerda*. Una cuerda que pasa por el centro del círculo se llama *diámetro*. Un segmento desde el centro del círculo hasta la circunferencia, esto es, la mitad de un diámetro se llama *radio*.

581 Definición (Ángulo central) Un ángulo cuyo vértice es el centro del círculo y cuyos lados son lados del círculo, es llamado *ángulo central*.

582 Definición (Ángulo periférico) Un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia del círculo y cuyos lados son cuerdas es llamado *ángulo periférico o inscrito en el círculo*.

583 Definición (Tangente a un círculo) Una tangente es una recta que pasa por sólo un punto de la circunferencia.

584 Definición (Secante a un círculo) Una secante es una recta que pasa por dos puntos de una circunferencia.

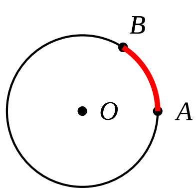


Figure 7.24: Arco $\widehat{AB}$.

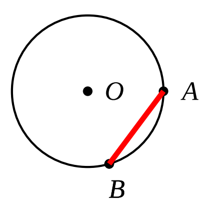


Figure 7.25: Cuerda $[AB]$.

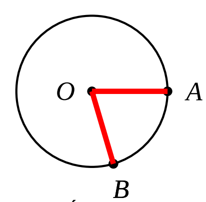


Figure 7.26: Ángulo central BOA.

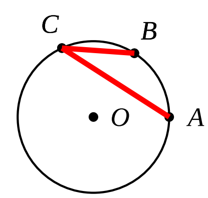


Figure 7.27: Ángulo periférico BCA.

Se utilizará el siguiente resultado, de fácil demostración.

585 Presunción Una recta perpendicular en su extremo a un radio de un círculo le es tangente al círculo. Recíprocamente, una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado desde el punto de contacto.

Se desarrollarán ahora una serie de resultados útiles en la caza de ángulos.

586 Teorema La medida de un ángulo periférico es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco.

Demostración: *Se dividirá la demostración en tres casos: (I) cuando uno de los lados es un diámetro, (II) cuando el centro del círculo está en el interior del ángulo, (III) cuando el centro del círculo está en el exterior del ángulo. Véanse las figuras 7.28, 7.29 y 7.30.*

En el primer caso, el $\triangle OAB$ es isósceles en A, ya que OA y OB son radios. Así pues $\widehat{BAC} = \widehat{OBA}$. Por ser ángulo exterior al $\triangle OAB$,

$$\widehat{COB} = \widehat{BAC} + \widehat{OBA} \implies \widehat{CAB} = \frac{\widehat{COB}}{2}.$$

En el segundo caso, utilizando el primer caso,

$$\widehat{CAB} = \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = \frac{COD}{2} + \frac{DOB}{2} = \frac{COB}{2}.$$

Para el tercer caso se utiliza el primer y el segundo caso:

$$\widehat{CAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAC} = \frac{DOB}{2} - \frac{DOC}{2} = \frac{COB}{2}.$$

❑

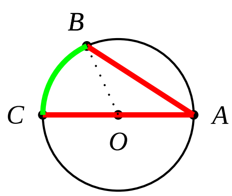


Figure 7.28: Teorema 586. Caso I.

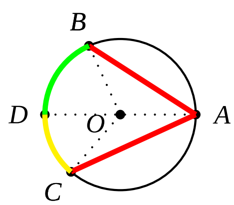


Figure 7.29: Teorema 586. Caso II.

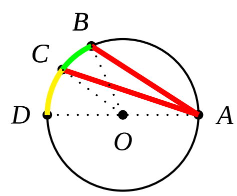


Figure 7.30: Teorema 586. Caso III.

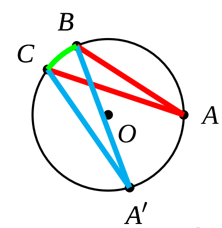


Figure 7.31: Corolario 587.

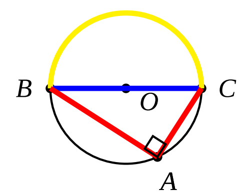


Figure 7.32: Corolario 588.

Los siguientes corolarios son ahora inmediatos.

587 Corolario Dos ángulos periféricos que subtienden el mismo arco son congruentes.

588 Corolario Un ángulo periférico que subtiende a un semicírculo es un ángulo recto.

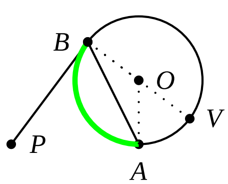


Figure 7.33: Teorema 589.

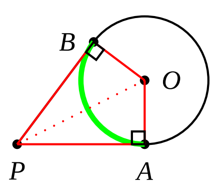


Figure 7.34: Corolario 590.

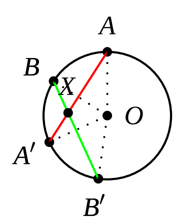


Figure 7.35: Teorema 591

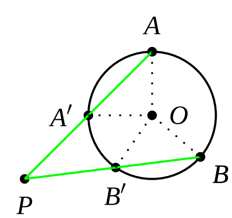


Figure 7.36: Teorema 592

589 Teorema El ángulo entre una tangente a un círculo y una cuerda es la mitad del ángulo central subtendido por la cuerda.

Demostración: *En la figura 7.33, trácese el diámetro* $[BV]$*. Por lo tanto* $[BV] \perp [PB]$*. Así,*

$$\widehat{PBA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABV} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AOV} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\pi - \widehat{BOA}\right) = \frac{\widehat{BOA}}{2},$$

como se tenía que demostrar. ❑

590 Corolario Tangentes trazadas desde un punto exterior hasta un círculo son congruentes.

Demostración: *Se sigue de inmediato de la congruencias $\triangle OPB \cong \triangle OPA$.* ❑

591 Teorema El ángulo entre dos cuerdas intersecándose dentro de una circunferencia es el promedio de los ángulos centrales de los arcos subtendidos.

Demostración: *En la figura 7.35, sea $X = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$. Se tiene que demostrar que*

$$\widehat{AXB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{A'OB'}}{2}.$$

Ahora $\widehat{AXB}$ es suplemento del ángulo exterior del triángulo $\triangle A'XB'$, extendiendo el lado $A'X$ hasta A. Así

$$\begin{aligned}
\widehat{AXB} &= \pi - \left(\widehat{XA'B'} + \widehat{XB'A'}\right) \\
&= \pi - \left(\widehat{AA'B'} + \widehat{BB'A'}\right) \\
&= \pi - \frac{\widehat{AOB'}}{2} + \frac{\widehat{BOA'} \circlearrowleft}{2} \\
&= \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{A'OB'}}{2},
\end{aligned}$$

terminando la demostración. ❑

592 Teorema El ángulo entre dos secantes intersecándose fuera de una circunferencia es el promedio de la diferencia de los ángulos centrales de los arcos subtendidos.

Demostración: *En la figura 7.36, sea $X = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$. Se tiene que demostrar que*

$$\widehat{AXB} = \frac{\widehat{AOB} \circlearrowright}{2} - \frac{\widehat{A'OB'}}{2}.$$

Del $\triangle PAB$,

$$\begin{aligned}
\widehat{PAB} &= \pi - \left(\widehat{PAB} + \widehat{PBA}\right) \\
&= \pi - \left(\widehat{A'AB} + \widehat{B'BA}\right) \\
&= \pi - \left(\widehat{A'AB} + \widehat{B'BA}\right) \\
&= \pi - \frac{\widehat{A'OB}}{2} + \frac{\widehat{AOB'}}{2} \\
&= \pi - \frac{\widehat{AOA'}}{2} + \widehat{A'OB'} + \frac{\widehat{BOB'}}{2} \\
&= \pi - \left(\frac{\widehat{AOB}}{2}\right) - \frac{\widehat{A'OB'}}{2} \\
&= \frac{\widehat{AOB} \circlearrowright}{2} - \frac{\widehat{A'OB'}}{2}
\end{aligned}$$

terminando la demostración. ❑

593 Definición Un cuadrilátero se llama *cíclico* si sus cuatro vértices yacen en un círculo.

594 Teorema El cuadrilátero simple $ABMN$ es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

Demostración: *Si ABMN es cíclico, la aserción es clara, ya que* $\widehat{ANB}$ *y* $\widehat{AMB}$ *subtienden, o bien el mismo arco del círculo, o bien, arcos complementarions. Véase las figuras 7.37 y 7.38.*

Presúmase ahora que los ángulos opuestos del cuadrilátero ABMN son suplementarios. Trácese un círculo circunscrito al $\triangle ABM$ *de centro O. Se demostrará que N también yace en este círculo. Se supondrá que N está fuera tanto como dentro del círculo y se obtendrá una contradicción en cada caso.*

Presúmase primero que N está fuera del círculo circunscrito al $\triangle ABM$*, como en la figura 7.39. Obsérvese que* $\widehat{ABM}$ *y* $\widehat{BOA}$ *juntos subtienden la circunferencia entera y luego* $2\widehat{ABM}+\widehat{BOA}=2\pi$*. Por hipótesis y en considerando los ángulos periféricos,*

$$\begin{aligned}\pi &= \widehat{ABM}+\widehat{MNA}\\ &= \widehat{ABM}+\frac{1}{2}\widehat{AOB}-\frac{1}{2}\widehat{QOP}\\ &= \pi-\frac{1}{2}\widehat{QOP}.\end{aligned}$$

Lo anterior es una contradicción, a menos que $\widehat{QOP}=0$*, esto es, a menos que N pertenezca, en efecto, a la circunferencia.*

Finalmente, presúmase que N está en el interior del círculo, tal como en la figura 7.40. En este caso también se tendrá $2\widehat{ABM}+\widehat{BOA}=2\pi$*, y así*

$$\begin{aligned}\pi &= \widehat{ABM}+\widehat{MNA}\\ &= \widehat{ABM}+\frac{1}{2}\widehat{QOP}+\frac{1}{2}\widehat{BOA}\\ &= \pi+\frac{1}{2}\widehat{QOP},\end{aligned}$$

de donde se colige que $\widehat{QOP}=0$*, dando nuevamente la demostración.* ❑

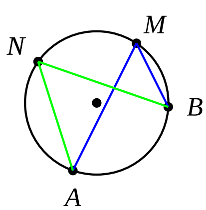


Figure 7.37: Teorema 594.

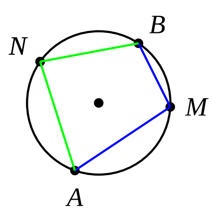


Figure 7.38: Teorema 594.

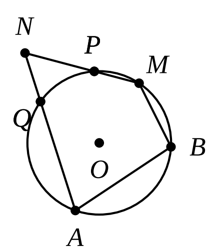


Figure 7.39: Teorema 594.

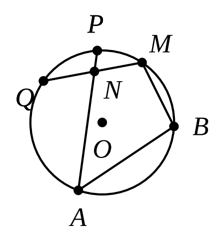


Figure 7.40: Teorema 594.

595 Teorema (Miquel) En el $\triangle ABC$ sean P, Q, R puntos sobre los lados $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, respectivamente. Entonces los círculos circunscritos de los triángulos $\triangle ARQ$, $\triangle BPR$, $\triangle CQP$ pasan por un punto común.

Demostración: *Sean* $T\neq R$ *el (otro) punto de intersección de los círculos circunscritos de los triángulos* $\triangle ARQ$ *y* $\triangle BPR$*. Por la colinealidad de los puntos involucrados,*

$$\widehat{TQA}=\pi-\widehat{CQT},\quad \widehat{TRB}=\pi-\widehat{ART},\quad \widehat{TPC}=\pi-\widehat{BPT}.$$

Porque los cuadriláteros involucrados son cíclicos,

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{ART}, \qquad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{BPT}.$$

Se deduce que

$$\begin{aligned}\widehat{TPC} &= \pi - \widehat{BPT} \\ &= \pi - \widehat{TRB} \\ &= \pi - \widehat{ART} \\ &= \pi - \widehat{TQA} \\ &= \pi - \widehat{CQT}\end{aligned}$$

y por consecuencia el cuadrilátero $CQPT$ es cíclico, de donde T al círculo circunscrito del $\triangle CQP$ pertenece. Véase la figura 7.41.❑

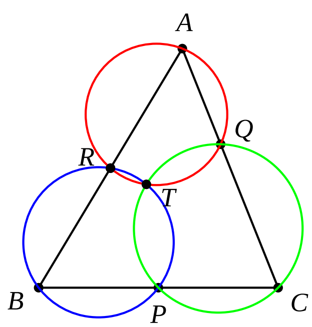


Figure 7.41: Teorema 595.

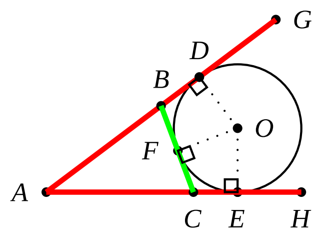


Figure 7.42: Ejemplo 596.

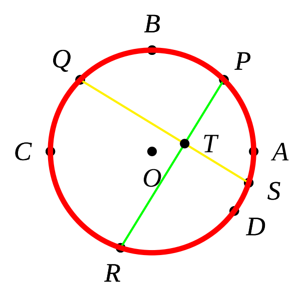


Figure 7.43: Ejemplo 597.

596 Ejemplo El círculo de centro O es tangente a la recta $\overleftrightarrow{AG}$ e D, a la recta $\overleftrightarrow{AH}$ en E y a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en F, como en la figura 7.42. Si $\widehat{HAG} = \alpha$, hállese $\widehat{BOC}$ en términos de α.

►**Resolución:** *Obsérvese que $\widehat{ADO}$ y que $\widehat{AEO}$ son rectos.*

Ahora, $[AO]$ biseca al $\widehat{HAG}$ y así $\widehat{DAO} = \frac{\alpha}{2}$, $\widehat{DOA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Como $[BD]$ y $[BF]$ son tangentes al círculo, $[OB]$ biseca al $\widehat{DOF}$. Luego

$$\widehat{BOF} = \frac{\widehat{DOA}}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\ .$$

El ángulo buscado es por lo tanto $2(\widehat{BOF}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. ◄

597 Ejemplo (Canadá, 1975) Se toman cuatro puntos "consecutivos" A, B, C, D en una circunferencia. Los puntos P, Q, R, S de la circunferencia son, respectivamente, los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$. Demostrar que $\overleftrightarrow{PR} \perp \overleftrightarrow{QS}$.

►**Resolución:** *Sea $\overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{QS} = T$ como en la figura 7.43 y sea O el centro de la circunferencia. Obsérvese que $\widehat{PBQ}$ y $\widehat{RDS}$ juntos comprenden la mitad de la circunferencia. Del $\triangle PTS$,*

$$\begin{aligned}
\widehat{PTS} &= \pi - (\widehat{PST} + \widehat{SPT}) \\
&= \pi - (\widehat{PSQ} + \widehat{SPR}) \\
&= \pi - \frac{1}{2}\left(\widehat{POQ} + \widehat{ROS}\right) \\
&= \pi - \frac{1}{2}\pi \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

mostrando la perpendicularidad de las rectas.[1] ◄

598 Ejemplo Dos círculos se intersecan en A y B. El punto P viaja alrededor de uno de los círculos. Las rectas PA y PB se extienden de tal manera que corten al otro círculo en C y D, respectivamente. Demuéstrese que la longitud de la cuerda CD es independiente de P.

►**Resolución:** *Es suficiente demostrar que $\widehat{CAD}$ es constante, como en la figura 7.44. Pero esto se desprende de*

$$\widehat{CAD} = \widehat{APB} + \widehat{ADB}$$

y de que estos últimos dos ángulos son constantes. ◄

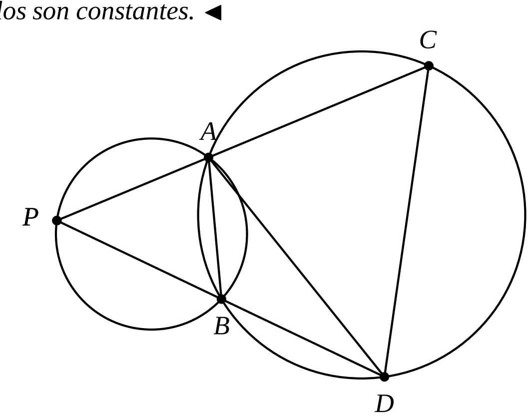


Figure 7.44: Ejemplo 598.

599 Ejemplo Tres círculos congruentes pasan por un punto común P, intersecándose en los puntos P, U, V y W como en la figura 7.45. Demuéstrese que P es el ortocentro del $\triangle UVW$.

►**Resolución:** *Sean A, B, C los centros de los círculos, véase la figura 7.46. Note que $AVCP$ y $BWCP$ son rombos y por tanto, paralelogramos. Luego $AV \parallel BW$ y así, $AVWB$ es un paralelogramo.*

Además PU es una cuerda común de los círculos con centro en A y B y así, perpendicular a AB. Luego pues, lo es también a VW. De manera semejante se demuestra que $PV \perp UW$ y $PW \perp UV$, de donde se obtiene el resultado.
◄

600 Ejemplo Sean A, B, C puntos colineales. Constrúyanse círculos con diámetros en AB, AC y BC. Sea D un punto en el arco $\widehat{AC}$ tal que $AD \perp AC$ y sea EF la tangente común a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$. Demuéstrese que $BEFD$ es un rectángulo. (Figura 7.47.)

[1] ¿Rectal?

►**Resolución:** *Relájese la condición $AC \perp BD$ y permítase a D recorrer el semicírculo AC. Sea Sea E' la intersección de AD con el semicírculo AB, y sea F' la intersección de DC con el semicírculo BC. Sean M y N los puntos medios de AB y BC respectivamente. Como $\widehat{ADC} = \widehat{AE'B} = \widehat{BF'C} = 90^\circ$, $BE'DF'$ es un rectángulo. Se tiene*

$$\widehat{E'BD} = \widehat{BE'F'} \qquad \widehat{F'BD} = \widehat{BF'E'}.$$

El $\triangle ME'B$ es isósceles, así $\widehat{MBE'} = \widehat{ME'B}$. De igual manera, $\triangle NBF'$ es isósceles, así $\widehat{NBF'} = \widehat{NF'B}$. Por lo tanto $\widehat{MBD} = \widehat{ME'F'}$ y $\widehat{NBD} = \widehat{NF'E'}$. Si $\widehat{MBD} = \widehat{ME'F'} = 90^\circ$ entonces $\widehat{ME'F'} = \widehat{NF'E'} = 90^\circ$, o en otras palabras, $E'F'$ es tangente a ambos semicírculos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$, y entonces $E = E'$, $F = F'$. Se concluye que $BEFD$ es un rectángulo. ◄

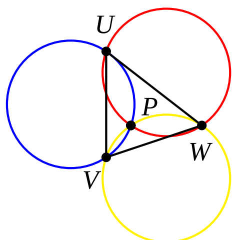


Figure 7.45: Ejemplo 599.

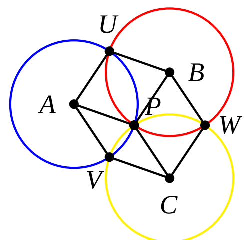


Figure 7.46: Ejemplo 599.

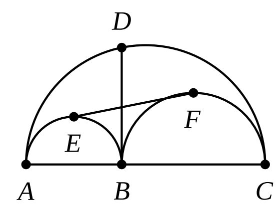


Figure 7.47: Ejemplo 600.

Tarea

601 Problema En la figura 7.48, ambos triángulos son equiláteros. Hállese la medida de x, en grados.

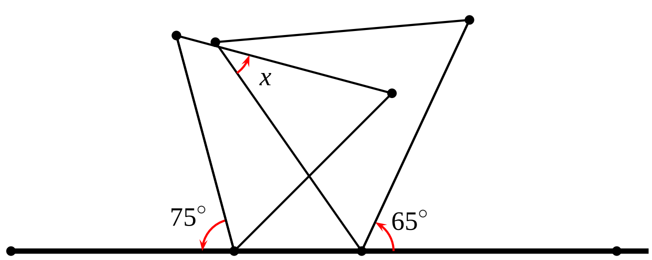


Figure 7.48: Problema 601.

602 Problema ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a cuarto para las cinco?

603 Problema $DEFG$ es un cuadrado que se ha trazado fuera del pentágono regular $ABCDE$. ¿Cuánto mide $\widehat{EAF}$ en grados?

604 Problema Tres cuadrados idénticos se construyen consecutivamente, como en la figura adjunta (figura 7.49). Calcúlese la suma de ángulos $\widehat{ACH} + ADH$.

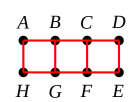


Figure 7.49: Problema 604.

605 Problema Se remueve de una pared un ladrillo que tiene forma poligonal regular. Se observa que si el ladrillo sufriese un giro de 40° o de 60° en torno a su centro, cabría otra vez en el hueco original. ¿Cuál es el menor número de lados de este polígono?

606 Problema Hallar la suma de los ángulos de los vértices $A + B + C + D + E$ de la estrella de cinco puntas de la figura 7.50.

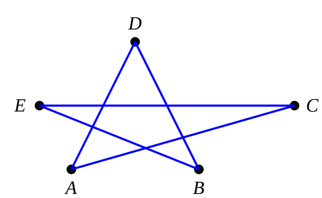


Figure 7.50: Problema 606.

607 Problema El $\triangle ABC$ es isósceles en A. Si P es el punto medio del segmento $[AB]$ y si $AP = PB = BC$, demostrar que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$.

608 Problema (AHSME, 1978) En la figura 7.51, $\triangle A_1A_2A_3$ es equilátero y A_{n+3} es el punto medio del segmento $[A_nA_{n+1}]$ para todo entero estrictamente positivo n. Demostrar que $\widehat{A_{44}A_{45}A_{46}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

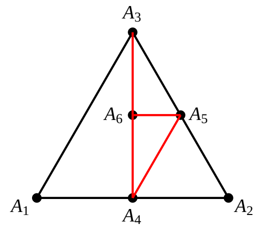


Figure 7.51: Problema 608.

609 Problema Dos círculos de radios desiguales son tangentes externamente en el punto A. Una tangente exterior común toca al círculo de menor radio en B y al círculo de radio mayor en $C \neq B$. Demostrar que $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$.

610 Problema Dos círculos se intersecan en dos puntos. Demuéstrese que la recta que une los centros de dos círculos que se intersecan es bisecada por la cuerda común de los círculos.

611 Problema Un círculo está inscrito en el triángulo $\triangle ABC$, siendo D, E, F los puntos de tangencia a los lados $[AB]$, $[CA]$ y $[BC]$ respectivamente. Demostrar que

$$BD = \frac{1}{2}(AB + BC - CA).$$

612 Problema Un círculo es inscrito en el triángulo $\triangle ABC$, rectángulo en C, como en la figura 7.52. El círculo es tangente a la hipotenusa $[AB]$ en P, en donde $AP = 20$ y $BP = 6$. Hallar el radio del círculo.

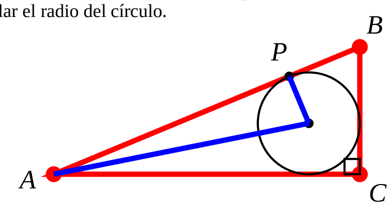


Figure 7.52: Problema 612.

613 Problema En la figura $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$. Hallar $\widehat{DAE}$.

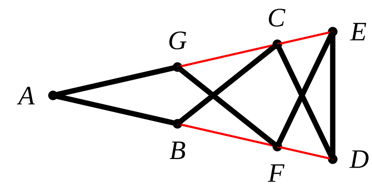


Figure 7.53: Problema 613.

614 Problema $ABCDEF$ en la figura 7.54 es un hexágono convexo equiangular. Demostrar que

$$AB - DE = CD - FA = EF - BC.$$

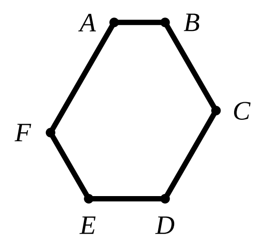


Figure 7.54: Problema 614.

7.2 Congruencia de triángulos y desigualdad del triángulo

Los siguientes resultados auxiliarán en el desarrollo del tema de esta sección.

615 Teorema (Desigualdad del triángulo) En todo triángulo no degenerado, la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados es mayor que la longitud del tercer lado.

> **Demostración:** *En la figura 7.55, $AB + AC > BC$ ya que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos en el plano.* ❑

616 Ejemplo Sea M un punto en el interior del $\triangle ABC$. Demostrar que

$$AB + AC > MB + MC.$$

En consecuencia, si P el perímetro del $\triangle ABC$, demostrar que

$$AM + BM + CM < P.$$

►**Resolución:** *Sea N el punto en el cual $\overleftrightarrow{BM}$ corta al $[AC]$. Entonces*

$$AB+AC = AB+AN+NC > BN+NC = BM+MN+NC > BM+MC,$$

demostrando la primera aserción.

De manera semejante se puede demostrar que

$$BA+BC > MA+MC, \quad CA+CB > MA+MB.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} AB+AC > MB+MC, \quad BA+BC > MA+MC, \quad CA+CB > MA+MB \quad &\implies \quad 2(AB+BC+CA) > 2(MA+MB+MC) \\ &\implies \quad AM+BM+CM < P. \end{aligned}$$

◄

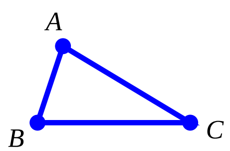


Figure 7.55: Teorema 615.

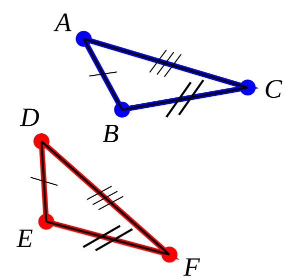


Figure 7.56: Triángulos congruentes.

617 Ejemplo Sea P el perímetro del $\triangle ABC$. Si M es un punto en el interior del triángulo, demostrar que

$$\frac{P}{2} < AM+BM+CM < P.$$

►**Resolución:** *Del $\triangle MAB$ se tiene*

$$AM+BM > AB.$$

Del $\triangle MCA$ se tiene

$$CM+AM > CA.$$

Del $\triangle MBC$ se tiene

$$BM+CM > BC.$$

Sumando,

$$AB+BC+CA < 2(AM+BM+CM) \implies \frac{P}{2} < AM+BM+CM.$$

La segunda desigualdad se obtiene del problema anterior. ◄

618 Ejemplo Sean a,b,c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuéstrese que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

►**Resolución:** *Se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{2a}{(b+c)+(b+c)}+\frac{2b}{(c+a)+(c+a)}+\frac{2c}{(a+b)+(a+b)} \\
&< \frac{2a}{a+(b+c)}+\frac{2b}{b+(c+a)}+\frac{2c}{c+(a+b)} \\
&= \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

◄

619 Definición (Mediatriz de un segmento de recta) La *mediatriz* de un segmento de recta es la recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a éste.

620 Teorema Si se erige una perpendicular desde el punto medio de un segmento de recta entonces

❶ cualquier punto en la perpendicular es equidistante de las extremidades del segmento de recta.

❷ cualquier punto que no esté en la perpendicular está a distancias desiguales de las extremidades del segmento.

Demostración: *Presúmase que en la figura 7.57, $[CD]\perp[AB]$, donde D es el punto medio del $[AB]$ y sea E cualquier punto en $[CD]$. Sobrepóngase ahora $\triangle BDE$ en $\triangle ADE$, utilizando $[DE]$ como eje de simetría. Se tiene $\widehat{BDE}=\widehat{ADE}$, ya que ambos son ángulos rectos. Entonces $\overleftrightarrow{BD}$ coincide con $\overleftrightarrow{AD}$. Por hipótesis $BD=AD$ y así, al doblar, A cae sobre B. Pero esto quiere decier que las rectas $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{AE}$ coinciden y por lo tanto $AE=BE$.*

En la figura 7.58, presúmase que $CD\perp AB$, que D es el punto medio del segmento $[AB]$ y que F está fuera de la recta $\overleftrightarrow{CD}$. Como una recta es la distancia más corta entre dos puntos,

$$BE+EF>BF.$$

Pero $BE=AE$ en virtud de ❶, de donde

$$BE+EF>BF \implies AF=AE+EF>BF,$$

completando la demostración. ❑

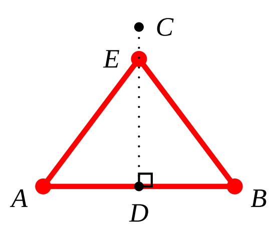


Figure 7.57: Teorema 620.

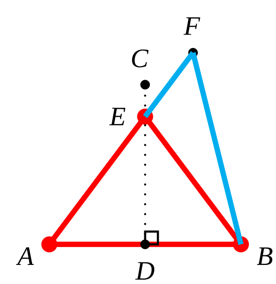


Figure 7.58: Teorema 620.

Los siguientes corolarios se deducen fácilmente.

621 Corolario Todo punto que equidista de los extremos de un segmento de recta yace en la mediatriz de este segmento de recta.

622 Corolario Dos puntos equidistantes de los extremos de un segmento de recta determinan la recta perpendicular a este segmento de recta que pasa por el punto medio del segmento de recta.

623 Corolario Si se trazan rectas desde cualquier punto de la mediatriz de un segmento de recta hasta los extremos éste entonces

❶ las rectas hacen ángulos iguales con el segmento de recta.

❷ las rectas hacen ángulos iguales con la perpendicular.

Demostración: *Sobreimpóngase $\triangle BDE$ en $\triangle ADE$ en la demostración del teorema 620. Luego $\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$ y $\widehat{AED} = \widehat{BED}$.* ❑

624 Definición Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se dicen *congruentes*, denotado por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si existe una correspondencia tal que sus lados correspondientes y ángulos correspondientes sean iguales.

En la figura 7.56 se tiene $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, $A = D$, $B = E$, $C = F$ y por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

625 Teorema (Criterio LAL) Si dos de los lados de un triángulo y el ángulo comprendido por estos dos lados son congruentes a los lados y al ángulo homólogos de otro triángulo, ambos triángulos son congruentes.

Demostración: *Presúmase que en la figura 7.59 se tiene $AB = DE$, $AC = DF$ y $A = D$. Sobreimpóngase $\triangle ABC$ sobre $\triangle DEF$ de tal manera que A y D coincidan, que el segmento $[AB]$ caiga sobre el $[DE]$ y que el $[AC]$ caiga sobre $[DF]$. Como $AB = DE$ y $AC = DF$, B deberá caer sobre E y C sobre F. Así, el lado $[BC]$ coincide con el lado $[EF]$ demostrando el teorema.*❑

626 Teorema (Criterio ALA) Si dos de los ángulos de un triángulo y el lado comprendido por estos dos ángulos son congruentes a los ángulos y al lado homólogos de otro triángulo, ambos triángulos son congruentes.

Demostración: *En la figura, 7.59, presúmase que $AB = DE$, $A = D$ y $B = E$. Sobreimpóngase $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ de tal manera $[AB]$ coincida con $[DE]$, que A caiga en D y que B caiga en E. Como $A = D$, el lado $[AC]$ deberá caer en el lado $[DF]$ y C deberá caer en alguna parte sobre $[DF]$. Como $B = E$, el lado $[BC]$ deberá caer en alguna parte de la recta $\overleftrightarrow{EF}$. Ya que C cae simultáneamente en $[DF]$ y $[EF]$, se sigue que deberá caer en la intersección de estos dos segmentos, esto es, en F.* ❑

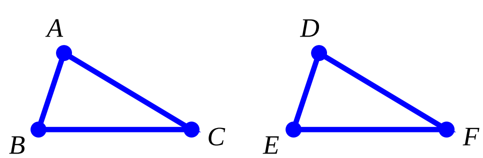


Figure 7.59: Teoremas 625, 626 y 627.

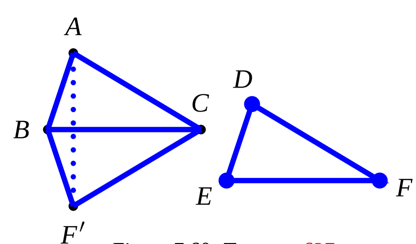


Figure 7.60: Teorema 627.

627 Teorema (Criterio LLL) Si los tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados homólogos de otro triángulo, ambos triángulos son congruentes.

Demostración: *Presúmase en la figura 7.60 que $AB = DE$, $BC = EF$, y que $CA = FD$. Póngase al $\triangle DEF$ sobre $\triangle ABF'$ con el lado $[DE]$ coincidiendo con $[AB]$ y F cayendo sobre F'. Trácese el segmento CF'. Por* *hipótesis* $[AC] = \ AF' \ $ *y* $[BC] = \ BF' \ $. *Así,* $[AB] \perp \ CF' \ $ *en su punto medio, por virtud del corolario 622. Entonces* $\widehat{BAC} = \widehat{BAF'}$. *Pero entonces* $\triangle ABC \cong \triangle ABF'$ *por el criterio LAL (teorema 625). Esto implica que* $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ❑

628 Definición Una recta que pasa por el vértice de un triángulo se llama *ceviana* de este vértice. La ceviana es *propia* si no coincide con un lado del triángulo.

☞ *Se adoptará la convención de marcar la intersección de la ceviana con el lado opuesto a su vértice con una prima* $'$, *así* AA', BB', CC' *son cevianas. Véase la figura 7.61.*

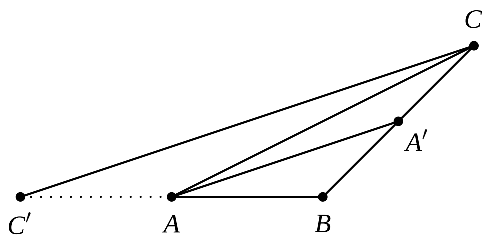


Figure 7.61: Cevianas.

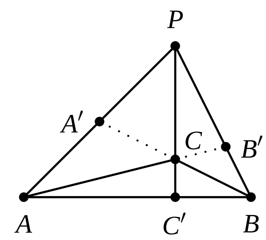


Figure 7.62: Cevianas.

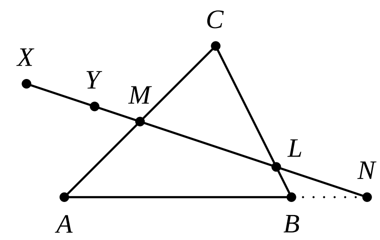


Figure 7.63: Puntos menelaicos.

629 Definición A un punto P que yaga sobre la recta determinada por un lado del $\triangle ABC$ se le llama *punto menelaico*[2] de este lado. Si el punto no es un vértice del triángulo entonces es un punto menelaico *propio*.

630 Definición (Mediana) Una ceviana que va desde un vértice de un triángulo al punto medio del segmento opuesto se llama *mediana*.

☞ *Los puntos medios de los lados* BC, CA, AB *del* $\triangle ABC$, *se denotarán respectivamente por* M_A, M_B, M_C. *Las respectivas medianas serán entonces por* $[AM_A]$, $[BM_B]$, $[CM_C]$ *y sus respectivas medidas por* m_A, m_B *y* m_C.

631 Definición (Altura) La ceviana que va desde un vértice de un triángulo y es perpendicular al segmento opuesto se llama *altura* del triángulos.

☞ *Los pies de las perpendiculares de los lados* BC, CA, AB *del* $\triangle ABC$, *se denotarán respectivamente por* H_A, H_B, H_C. *Las respectivas alturas serán entonces por* $[AH_A]$, $[BH_B]$, $[CH_C]$ *y sus respectivas medidas por* h_A, h_B *y* h_C.

632 Ejemplo En el cuadrado $ABCD$ de la figura 7.65, $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \dfrac{\pi}{12}$. Demostrar que $\triangle CDO$ es equilátero.

►**Resolución:** *Constrúyase el* $\triangle AFB$ *equilátero, como en la figura 7.66. Obsérvese que* $AO = OB$, *ya que el* $\triangle AOB$ *es isósceles. Además* $\widehat{DAO} = \widehat{CBO} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12}$. *Luego* $\triangle DAO \cong \triangle CBO$ *gracias al criterio LAL, y así* $DO = CO$. *Por lo tanto es suficiente demostrar que* $\widehat{DOA} = \dfrac{5\pi}{12}$, *ya que entonces* $\triangle DAO$ *sería isósceles y se tendría* $DC = DA = DO = CO$, *de donde resultaría que* $\triangle CDO$ *es equilátero.*

[2] Que no puntos *melenudos*.

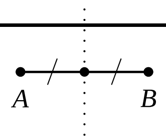


Figure 7.64: Mediatriz de $[AB]$.

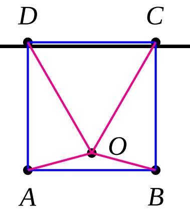


Figure 7.65: Ejemplo 632.

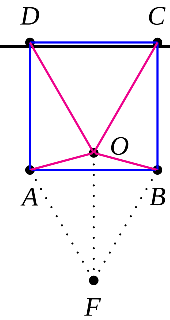


Figure 7.66: Ejemplo 632.

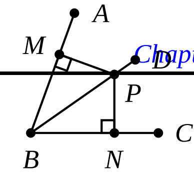


Figure 7.67: Teorema 633.

Como $\triangle AOB$ and $\triangle AFB$ son ambos isósceles, la recta OF biseca a los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{AFB}$, siendo además la mediatriz del segmento $[DC]$. Así pues $\widehat{AOB} = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$. Como $\widehat{DAO} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ y $\widehat{OAF} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$ y como además $DA = AF$, $\triangle DAO \cong \triangle FAO$ gracias al criterio LAL. Así, $\widehat{DOA} = \widehat{AOF} = \frac{5\pi}{12}$, completando la demostración. ◀

633 Teorema Todo punto en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo. Recíprocamente, si un punto equidista de los lados del ángulo entonces yacerá sobre la bisectriz angular.

Demostración: *En la figura 7.67, presúmase que P está en la bisectriz $\overleftrightarrow{BD}$ del ángulo $\widehat{ABC}$, esto es que $\widehat{PBM} = \widehat{PBN}$. Presúmase que $[PM] \perp [AB]$, $[PN] \perp [BC]$. Siendo triángulos rectángulos con ángulos idénticos e hipotenusa idéntica se concluye que $\triangle BPM \cong \triangle BPN$. Así $PM = PN$.*

Recíprocamente, si $[PM] \perp [AB]$, $[PN] \perp [BC]$ y $PM = PN$ entonces $\triangle BPM \cong \triangle BPN$, siendo ambos triángulos rectángulos con un cateto e hipotenusa iguales. ❑

Tarea

634 Problema Demostrar que si los lados de un triángulo son desiguales, los ángulos opuestos son también desiguales y el ángulo mayor está opuesto al lado mayor. Recíprocamente, demostrar que si los ángulos de un triángulo son desiguales, los lados opuestos son también desiguales y el lado mayor está opuesto al ángulo mayor.

635 Problema Sea P un punto en el interior del $\triangle ABC$. Demostrar que $\widehat{BPC} > A$.

636 Problema En el triángulo $\triangle ABC$, se traza la mediana $[AM_A]$. Demostrar que si $BM_A = AM_A$, entonces el triángulo es rectángulo en A. Véase la figura 7.68.

637 Problema Demostrar que en un triángulo arbitrario, la suma de la longitud de las alturas es menor que el perímetro del triángulo.

638 Problema Considérese n puntos verdes y n puntos amarillos en el plano, satisfaciendo que no tres de ellos son colineales. Demostrar que se puede parear cada punto verde con uno amarillo de tal manera que ningún segmento se cruce.

639 Problema (AHSME 40) Véase la figura 7.69.En el $\triangle ABC$, $A = 100^\circ$, $B = 50^\circ$, $C = 30^\circ$. Además, $[BH]$ es una altura y $[BM]$ es una mediana. Hállese la medida de MHC.

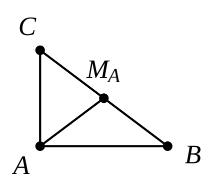


Figure 7.68: Problema 636.

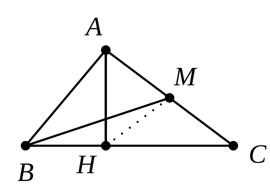


Figure 7.69: Problema 639.

7.3 Trapecios y paralelogramos

640 Definición (Trapecio) Un *trapecio* es un cuadrilátero en el cual al menos un par de lados son paralelos.

641 Definición (Paralelogramo) Un *paralelogramo* es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados son paralelos.

642 Teorema Si $ABCD$ es un paralelogramo entonces

- los ángulos opuestos son congruentes.
- los ángulos interiores adyacentes son suplementarios.
- los lados opuestos son congruentes.
- las diagonales se bisecan la una a la otra.

Demostración: *Véase la figura 7.70. Por ser ángulos alternos internos a dos paralelas,*

$$\widehat{BAC} = \widehat{DCA}, \quad \widehat{DAC} = \widehat{BCA}, \quad \widehat{ABD} = \widehat{CDB}, \quad \widehat{CBD} = \widehat{ADB}.$$

Ahora, $A = \widehat{DAC} + \widehat{BAC} = \widehat{DCA} + \widehat{BCA} = C$ *y* $B = \widehat{ABD} + \widehat{CBD} = \widehat{CDB} + \widehat{ADB} = D$ *y así los ángulos opuestos son congruentes. Como la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es* 2π *se tiene*

$$2\pi = A + B + C + D = 2(A+B) \implies (A+B) = (C+D) = \pi,$$

de donde los ángulos interiores adyacentes son suplementarios.

Ahora, por el criterio ALA, $\triangle DAC \cong \triangle BCA$ *y así* $AD = BC$ *y* $AB = CD$*, de donde los lados opuestos son congruentes.*

Por la igualdad de ángulos arriba establecida y por el criterio $\triangle OAB \cong \triangle OCD$*, de donde* $AO = OC$ *y* $BO = OD$*, de donde las diagonales se bisecan la una a la otra.* ❑

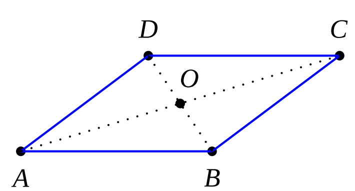


Figure 7.70: Paralelogramo.

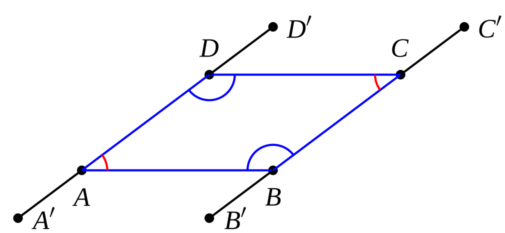


Figure 7.71: Teorema 643.

En efecto, algunas de las propiedades arriba mencionadas son suficientes para que un cuadrilátero paralelogramo sea.

643 Teorema Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo. Las siguientes propiedades son mutuamente equivalentes:

1. *ABCD* es un paralelogramo.
2. un par de lados opuestos son congruentes y paralelos.
3. Los ángulos interiores opuestos son congruentes.
4. Los lados opuestos son iguales.
5. Las diagonales se bisecan la una a la otra.

Demostración: *Refiérase a la figuras 7.70 y 7.71.*

$1 \implies 2$ *Que un par de lados opuestos son congruentes se sigue por definición de paralelogramo. Que este par de lados opuestos son congruentes se sigue por el teorema 642.*

$2 \implies 3$ *Presúmase que* $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ *y que* $AD = BC$. *En* $\triangle DBA$ *y* $\triangle BDC$ *se tiene* $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$, *por ser ángulos alternos internos entre paralelas por la transversal* $\overleftrightarrow{DB}$. *Por la misma razón,* $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$. *Así*

$$\widehat{ADB} + \widehat{ABD} = \widehat{CBD} + \widehat{CDB} \implies D = B.$$

De la misma manera se puede establecer que $A = C$.

$3 \implies 4$ *En la figura 7.71,* $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{A'D'}$ *y* $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{B'C'}$. *Presúmase que en cuadrilátero ABCD,* $A = C$ *y* $B = D$. *Como*

$$A + B + C + D = 2\pi,$$

se tiene $A = \pi - D = \pi - B = C$. *Luego los ángulos alternos internos de la transversal* $\overleftrightarrow{BD}$ *a las rectas* $\overleftrightarrow{AD}$ *y* $\overleftrightarrow{BC}$ *son iguales, y se concluye que* $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Habiendo probado que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, *se obtiene entonces que los ángulos alternos internos producidos por la diagonal* $[AC]$ *a estas rectas son iguales. Luego, por el criterio ALA,* $\triangle DAC \cong \triangle BCA$. *De aquí,* $AD = BC$ *y* $AB = CD$.

$4 \implies 5$ *Sean* $AD = BC$ *y* $AB = CD$. *Los ángulos verticales* $\widehat{DOC}$ *y* $\widehat{BOA}$ *son congruentes y por tanto* $\triangle AOB \cong \triangle COD$. *De aquí,* $AO = OC$ *y* $DO = OB$.

$5 \implies 1$ *Supóngase* $AO = OC$ *y* $BO = OD$. *Por ser ángulos opuestos por el vértice O,* $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$. *Luego* $\triangle COD \cong \triangle AOB$ *por el criterio LAL. Luego* $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ *y siendo ángulos alternos internos de la transversal* $\overleftrightarrow{AC}$, *se tiene* $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. *De igual manera,* $\widehat{DOA} = \widehat{BOC}$ *y* $\triangle DOA \cong \triangle BOC$ *por LAL. Luego* $\widehat{ODA} = \widehat{OBC}$ *y siendo ángulos alternos internos de la transversal* $\overleftrightarrow{DB}$, *se tiene* $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CB}$. *Se concluye que ABCD es un paralelogramo.*

❑

Las siguientes definiciones y presunciones son análogas.

644 Definición (Rombo) Un *rombo* es un paralelogramo en el cual dos lados consecutivos son congruentes.

En efecto, es fácil demostrar lo siguiente.

645 Presunción Sea *ABCD* un cuadrilátero simple. Las siguientes propiedades son mutuamente equivalentes:

1. *ABCD* es un rombo.
2. Los cuatro lados son congruentes.
3. Las diagonales se bisecan la una a la otra en ángulos rectos.
4. Las diagonales se bisecan el ángulo en cada vértice.

646 Definición (Rectángulos) Un *rectángulo* es un paralelogramo en el cual al menos uno de sus ángulos es recto.

Como es bien sabido, en efecto, todos los ángulos de un rectángulo serán rectos.

647 Presunción Sea *ABCD* un cuadrilátero simple. Las siguientes propiedades son mutuamente equivalentes:

1. *ABCD* es un rectángulo.
2. Los cuatro ángulos internos son todos rectos.

3. Las diagonales son congruentes y se bisecan la una a la otra.

648 Definición (Distancia entre rectas paralelas) La distancia entre dos rectas paralelas es la longitud de cualquier segmento perpendicular de una a otra recta.

649 Definición (Cuadrado) Un *cuadrado* es un paralelogramo que es tanto un rombo como un rectángulo.

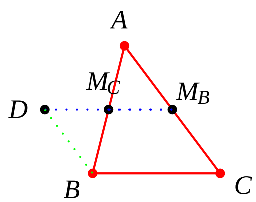


Figure 7.72: Teorema 650

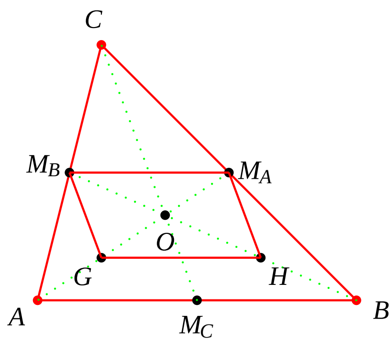


Figure 7.73: Teorema 653.

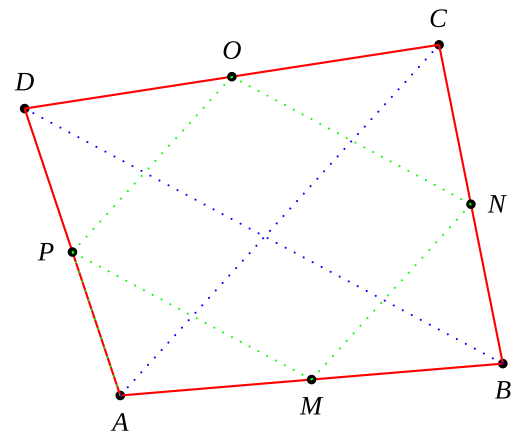


Figure 7.74: Teorema 655.

Se utilizarán ahora los resultados obtenidos arriba para demostrar varias propiedades de triángulos y cuadriláteros.

650 Teorema El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de éste.

> **Demostración:** *Constrúyase $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e intersecando $\overleftrightarrow{M_BM_C}$ en D. Por ser ángulos opuestos por el vértice M_C, $\widehat{M_BM_CB} = \widehat{DM_BB}$. Por ser ángulos alternos internos de las paralelas $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$ se tiene que $A = \widehat{M_CBD}$. Como por hipótesis $AM_C = M_CB$ se concluye por el criterio ALA que $\triangle AM_CM_B \cong \triangle BM_CD$. Así, $M_BM_C = M_CD$ y $AM_B = DB$. Luego BDM_BC es un paralelogramo. Finalmente, $M_BM_C = \dfrac{DM_B}{2} = \dfrac{BC}{2}$.* ❏

651 Corolario La recta que biseca a un lado de un triángulo y es paralela a otro de sus lados, biseca también al tercer lado.

> **Demostración:** *Supóngase que en la figura 7.72, la recta $\overleftrightarrow{M_CF}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, donde F es la intersección de la dicha recta con el lado $[AC]$. Del teorema 650, $\overleftrightarrow{M_CM_B} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Luego se tiene $\overleftrightarrow{M_CM_B} \parallel \overleftrightarrow{M_CF}$. Tanto M_B como F yacen sobre $[AC]$, se tiene $F = M_B$.* ❏

Aplicando el teorema anterior y su corolario a los triángulos obtenidos por las diagonales de un trapecio, se obtiene el siguiente teorema.

652 Teorema El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases y mide el promedio de las longitudes de las bases. Dicho segmento se denomina la *mediana* del trapecio. Demostrar a su vez, que la mediana del trapecio biseca las diagonales del trapecio.

Se demostrarán ahora importantes teoremas de concurrencia.

653 Teorema Las medianas de un triángulo concurren. El punto de concurrencia, llamado *baricentro* divide a la mediana en razón 2 : 1 comenzando desde el vértice.

Demostración: *Sea* $\overleftrightarrow{AM_A} \cap \overleftrightarrow{BM_B} = O$. *Sean* G *y* H *los puntos medios de* $[OA]$ *y* $[OB]$, *respectivamente. Del teorema 650,* $M_AM_B = \dfrac{AB}{2}$ *y* $\overleftrightarrow{M_AM_B} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ *y en considerando el* $\triangle OAB$ *y aplicando nuevamente el teorema 650 se tiene* $GH = \dfrac{AB}{2}$ *y* $\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. *Luego* M_AM_BHG *es un paralelogramo y por el teorema 642, sus diagonales se bisecan en* O. *Luego*

$$AG = GO = GM_A, \qquad BH = HO = OM_A$$

de donde se deduce

$$AO = \frac{2AM_A}{3}, \qquad BO = \frac{2BM_B}{3}.$$

Supóngase ahora que $\overleftrightarrow{AM_A} \cap \overleftrightarrow{CM_C} = O'$. *Por lo arriba demostrado,*

$$AO' = \frac{2AM_A}{3}, \qquad CO' = \frac{2CM_C}{3}.$$

Pero entonces

$$AO' = \frac{2AM_A}{3} = AO \implies O = O',$$

de donde las tres medianas concurren. ❑

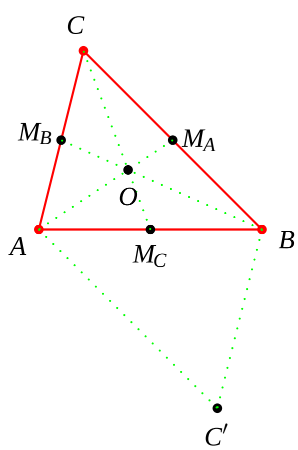


Figure 7.75: Ejemplo 654.

654 Ejemplo Sea P el perímetro del $\triangle ABC$. Entonces

$$\frac{3P}{4} < AM_A + BM_B + CM_C < P.$$

►**Resolución:** *Usando el teorema 653,*

$$AO + BO > AB \implies \frac{2}{3}AM_A + \frac{2}{3}BM_B > AB \implies AM_A + BM_B > \frac{3}{2}AB.$$

De manera semejante,

$$BM_B + CM_C > \frac{3}{2}BC, \quad CM_C + AM_C > \frac{3}{2}CA.$$

Sumando,

$$2(AM_A + BM_B + CM_C) > \frac{3}{2}(AB + BC + CA) \implies AM_A + BM_B + CM_C > \frac{3}{4}(AB + BC + CA),$$

deduciendo la primera desigualdad.

Véase la figura 7.75. Refléjese el punto C a través del punto M_C y sea C' la imagen de esta reflexión. Nótese que $CM_C = M_CC'$ y que por lo tanto, $CAC'B$ es un paralelogramo. Como $CC' = 2CM_C$ y $AC' = BC$, se tiene

$$AC + AC' > CC' \implies AC + BC > 2CM_C.$$

De la misma manera,

$$AC + ABC > 2AM_A, \quad AB + BC > 2BM_B.$$

Sumando,

$$2(AB + BC + CA) > 2(AM_A + BM_B + CM_C) \implies AM_A + BM_B + CM_C < P,$$

dando la segunda desigualdad. ◀

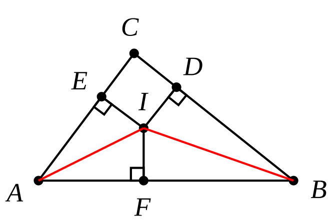


Figure 7.76: Teorema 656.

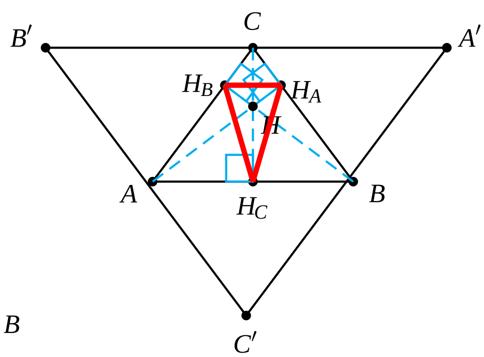


Figure 7.77: Teorema 657.

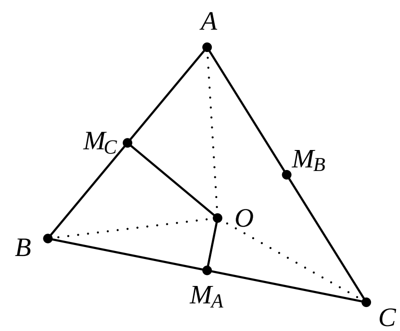


Figure 7.78: Teorema 658.

655 Teorema (Varignon) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, y sean M, N, O, P, respectivamente, los puntos medios de los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ y $[DA]$. Entonces $MNOP$. es un paralelogramo.

Demostración: *Por el teorema 650, considerando $\triangle ACD$ y $\triangle ABC$ se tiene*

$$[PO] \parallel [CA], \quad [MN] \parallel [CA], PO = \frac{CA}{2} = MN.$$

Considerando $\triangle CDB$ y $\triangle ADB$ se tiene

$$[ON] \parallel [DB], \quad [PM] \parallel [DB], ON = \frac{DB}{2} = DB.$$

Se desprende que $MNOP$ es un paralelogramo. ❏

656 Teorema Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren. El punto de concurrencia es llamado el *incentro* del triángulo.

Demostración: *Denótese por I la intersección de las bisectrices angulares de los ángulos de los vértices A y B. Se deberá demostrar que IC biseca al ángulo de vértice C. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde I a BC, CA y AB, respectivamente.*

Obsérvese que $\triangle IDB \cong \triangle IEB$ y $\triangle IEA \cong \triangle IFA$. Se sigue que $ID = IE = IF$. En consecuencia, $\triangle IDC \cong \triangle IFC$. Por lo tanto $\triangle ICD \cong \triangle ICF$, como se debía demostrar. ❑

☞ *De la demostración del teorema 656, $ID = IE = IF = r$, digamos. Luego I es el centro del círculo inscrito en el $\triangle ABC$ de radio r. Véase la figura 7.79.*

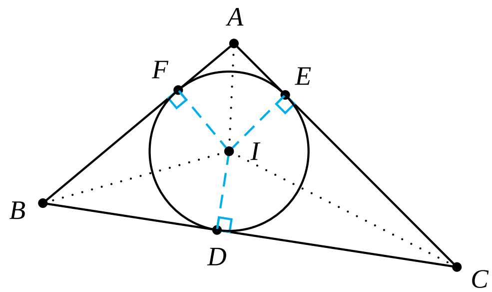


Figure 7.79: El círculo inscrito.

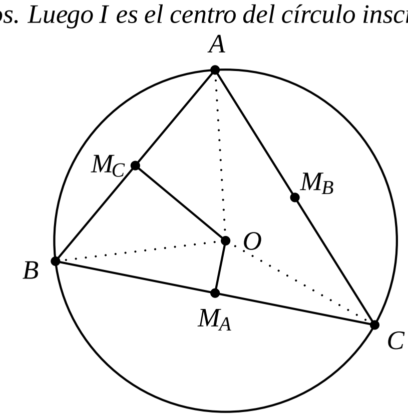


Figure 7.80: El circuncírculo.

657 Teorema Las alturas de un triángulo concurren. El punto de concurrencia es llamado el *ortocentro* del triángulo.

Demostración: *Por cada uno de los vértices del $\triangle ABC$ trácese una recta paralela al lado opuesto del vértice, y fórmese el $\triangle A'B'C'$. Refiérase a la figura 7.77. Se demostrará que cada altura del $\triangle ABC$ es un segmento de recta yaciendo en una mediatriz perpendicular del $\triangle A'B'C'$. Como ya se ha demostrado que las mediatrices perpendiculares concurren, se sigue que en tanto las alturas se intersequen, se intersecarán en un sólo punto. Pero que cualquier par de alturas se intersecan en un punto es obvio, ya que no son rectas paralelas!*

Se ha demostrar ahora que la altura del $\triangle ABC$ en B yace en la mediatriz perpendicular de $A'C'$. Los casos de las otras dos alturas se demuestran de manera semejante. Por definición, la altura del $\triangle ABC$ en B es perpendicular AC y como, por construcción, $AC \parallel A'C'$, esta altura también es perpendicular a $A'C'$. Falta demostrar que B es el punto medio de $A'C'$. Nótese que tanto $ABA'C$ como $ACBC'$ son paralelogramos. Se sigue, como los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes, que $BA' = AC$ y $C'B = AC$. Luego B es la mediatriz de $A'B'$ y queda demostrada la aserción. ❑

658 Teorema Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren. El punto de concurrencia es llamado el *circuncentro* del triángulo.

Demostración: *Denótense los puntos medios de los lados BC, CA, AB por M_A, M_B, M_C. Sea O el punto de intersección de las mediatrices perpendiculares de AB y AC. Se tiene que demostrar que $OM_A \perp BC$. Obsérvese que $\triangle OBM_C \cong \triangle OAM_C$, al ser ambos triángulos rectángulos con dos catetos iguales. De manera semejante, $\triangle OBM_A \cong \triangle OCM_A$. Notando ángulos correspondientes $\widehat{OM_AB} = \widehat{OM_AC} = \dfrac{\pi}{2}$, ya que forman una línea recta. Queda demostrado el teorema.* ❑

☞ *De la demostración del teorema 658 se sigue que el circuncentro de un triángulo dado equidista de sus vértices. Luego, es el centro de su círculo circunscrito.*

Tarea

659 Problema Si las medianas de dos lados de un triángulo son iguales, demostrar que el triángulo es isósceles.

660 Problema Si dos de las alturas de un triángulo son iguales, demostrar que el triángulo es isósceles.

661 Problema Si un triángulo no es isósceles, demostrar que las bisectrices internas angulares son desiguales.

7.4 Perímetros y áreas

Se presumirán conocidos los conceptos de *perímetro* y *área*. En particular, se presumirán conocidas las siguientes fórmulas.

662 Presunción (Fórmulas de perímetro de varias figuras planas) El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. El perímetro o circunferencia de un círculo es $2\pi r$, en donde r es el radio del círculo. La longitud de un arco de círculo que subtiende un arco central de θ radianes es $r\theta$.

663 Presunción (Fórmulas de área de varias figuras planas) El área de un rectángulo de lados a y b unidades lineales es ab unidades cuadradas. El área de un trapecio de bases paralelas de longitud a y b unidades lineales y de altura h es $\frac{(a+b)h}{2}$ unidades cuadradas. En particular, si $a=0$ se obtiene que el área de un triángulo de base b y altura h es $\frac{bh}{2}$. El área de un triángulo equilátero de lado s es $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. El área de un círculo de radio r es πr^2. El área de un sector circular que subtiende un ángulo central de θ radianes en un círculo de radio r es $\frac{\theta r^2}{2}$.

☞ *El área del triángulo $\triangle ABC$ se denotará por $[\triangle ABC]$.*

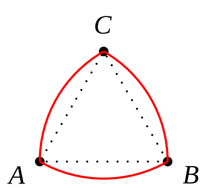


Figure 7.81: Ejemplo 664.

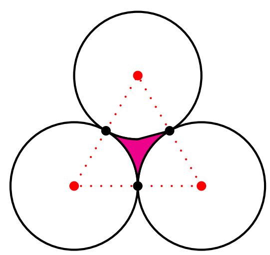


Figure 7.82: Ejemplo 665.

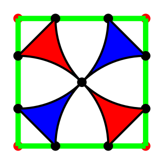


Figure 7.83: Ejemplo 666.

664 Ejemplo Un *triángulo de Reuleux* es la figura obtenida al trazar arcos de radio s con centro en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado s, cada arco de 60°, como en la figura 7.81. Hallar el perímetro y el área de un triángulo de Reuleux.

►**Resolución:** *El perímetro es la suma de los tres arcos circulares, cada uno midiendo $s\frac{\pi}{3}$, de donde el perímetro buscado es*

$$3s\frac{\pi}{3}=\pi s.$$

El área deseada es el área del triángulo equilátero contenido más tres veces el área de uno de los segmentos circulares. El área de uno de dichos segmentos es

$$\frac{\pi s^2}{6}-\frac{s^2\sqrt{3}}{4},$$

de donde el área buscada es

$$3\left(\frac{\pi s^2}{6}-\frac{s^2\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{s^2\sqrt{3}}{4}=\frac{s^2}{2}\left(\pi-\sqrt{3}\right).$$

◀

665 Ejemplo Tres círculos de radio R son mutuamente tangentes, como se muestra en la figura 7.82. ¿Cuál es el área de la figura acotada por los tres círculos?

►**Resolución:** *El área buscada es el área del triángulo equilátero formado al unir los tres centros de los círculos menos tres veces el área de uno de los sectores angulares formados. Como el triángulo equilátero tiene lado de longitud* $2R$*, su área es*

$$R^2\sqrt{3}.$$

Como $\frac{\pi}{3}$ *es* $\frac{1}{6}$ *de la circunferencia, cada sector angular tiene área de* $\frac{\pi R^2}{6}$*. Luego el área buscada es*

$$R^2\sqrt{3}-\frac{R^2\pi}{2}.$$

◀

666 Ejemplo El cuadrado de la figura 7.83 tiene lado 1. La región sombreada es formada por el área solapada de cuartos de círculos centrados en los vértices del cuadrado. Círculos diagonalmente opuestos son tangentes. Hallar el área sombreada.

►**Resolución:** *El área de la figura es el doble del área en rojo. Primero se halla el radio de cada uno de los cuartos de círculo. La diagonal del cuadrado mide* $2r$*. Por el Teorema de Pitágoras,*

$$(2r)^2=1^2+1^2,$$

de donde $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$*. La región en rojo tiene como área el área del cuadrado menos dos de los cuartos de círculos y dos pequeños triángulos isósceles en las esquinas. Así pues el área en rojo es*

$$1-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}.$$

El área de la cruz patea es luego

$$2\sqrt{2}-1-\frac{\pi}{2}.$$

◀

Tarea

667 Problema El $\triangle ABC$ es equilátero, de lado a. Dos círculos tangentes con centros en B y C respectivamente se trazan, como en la figura 7.84. Mostrar que el perímetro del área sombreada es

$$a+\frac{\pi a}{3}$$

y por lo tanto independiente de los radios de los círculos. Demostrar además que el área de esta región es

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}(R^2+r^2),$$

en donde R y r son los radios de los círculos.

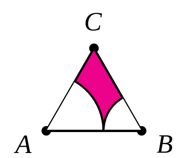


Figure 7.84: Problema 667.

668 Problema (Teorema de Viviani) Sea h la longitud de una altura del triángulo equilátero $\triangle ABC$ y sea P cualquier punto en el interior del triángulo. Sean R,S,T los pies de las perpendiculares desde P hasta los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, respectivamente. Demostrar que

$$PR+PS+PT=h.$$

669 Problema En el trapecio $ABCD$, $[AB] \parallel [CD]$. Se traza $[MN] \parallel [AB]$ con $M \in [AD]$ y $N \in [BC]$. Si $[MN]$ biseca el área del trapecio, hallar MN.

670 Problema En la figura 7.85, los seis círculos pequeños tienen radio 1 y cada uno es tangente a sus dos vecinos y al círculo mayor que los encierra. ¿Cuál es el área de la región estrellada acotada por los seis círculos internos?

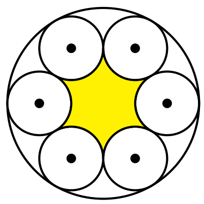


Figure 7.85: Problema 670.

671 Problema Cuatro cilindros de diámetro 1 están pegados apretadamente por una cuerda muy fina, como en la figura 7.86. Demostrar que la cuerda tiene longitud $4 + \pi$. Demostrar también que el área sombreada entre los cilindros es $1 - \frac{\pi}{4}$.

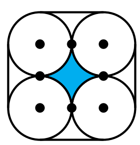


Figure 7.86: Problema 671.

672 Problema El cuadrado en la figura 7.87 tiene lado 4. Demostrar que el área de la rosa de cuatro pétalos mostrada es

$$8\pi - 16.$$

La rosa es la intersección de semicírculos de radio 2 con diámetros en los lados del cuadrado.

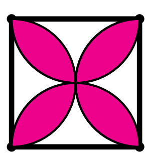


Figure 7.87: Problema 672.

673 Problema (AHSME, 1984) Un rectángulo interseca a un círculo, como en la figura 7.88. Si $AB = 4, BC = 5$ y $DE = 3$, hallar EF.

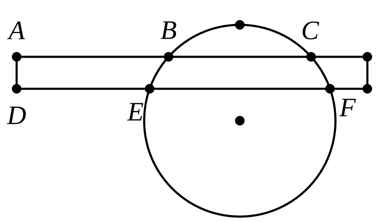


Figure 7.88: Problema 673.

674 Problema El punto P está en el interior del triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado 3. La distancia de P a $[AB]$ es a, la distancia de P a $[AC]$ es $2a$ y la distancia de P a $[CB]$ es $3a$. Hallar a.

675 Problema El rectángulo en la figura 7.89 se diseca en nueve cuadrados. Si el cuadrado sombreado tiene área 1, ¿cuál es el área del rectángulo?

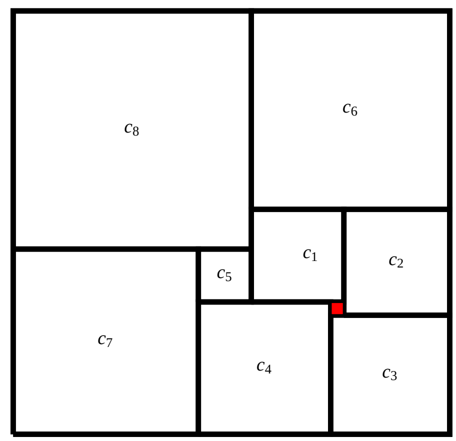


Figure 7.89: Problema 675

676 Problema Dos cuadrados $ABCD$ y $EHGF$, ambos de lado a, están colocados en manera tal que un vértice de uno está en el centro del otro, como en la figura 7.90. Demostrar que el área del cuadrilátero $EJCK$ es $\frac{a^2}{4}$ y no depende de la posición de J (o K).

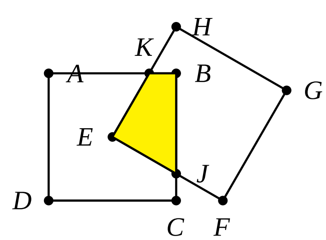


Figure 7.90: Problema **??**.

677 Problema El hexágono $ABCA'B'C'$ en la figura 7.91 está inscrito en una circunferencia, tal que las diagonales AA', BB' y CC' son diámetros de la circunferencia y $[ACB'] = 1$. Calcular $[ABCA'B'C']$.

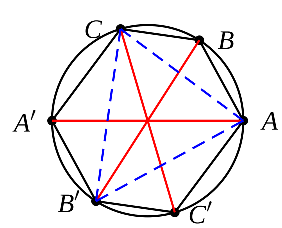


Figure 7.91: Problema 677.

678 Problema En la figura 7.92, cada una de las cuerdas divide al círculo exterior en dos regiones cuyas áreas están en razón $1:3$. La intersección de las cuerdas forma un cuadrado concéntrico con el círculo exterior e inscrito en el círculo interior. Demostrar que la razón del área sombreada al área del círculo interno es $\frac{1}{2\pi}$.

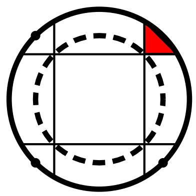


Figure 7.92: Problema 678.

679 Problema $\widehat{AB}$ es un cuarto de circunferencia del círculo de centro O que tiene radio R. Los arcos $\widehat{OA}$ y $\widehat{OB}$ son semicírculos congruentes y de diámetro R. Hállese el área de la región sombreada. Véase la figura 7.93.

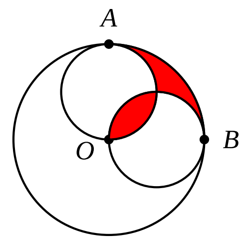


Figure 7.93: Problema 679.

7.5 Teorema de Pitágoras

Se discutirá ahora lo que es quizás el más famoso teorema en todas las matemáticas.

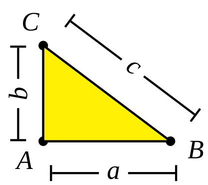


Figure 7.94: Dimensiones.

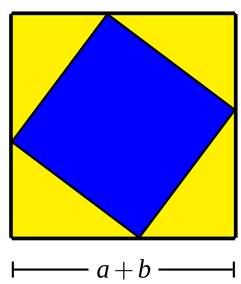


Figure 7.95: Pitágoras.

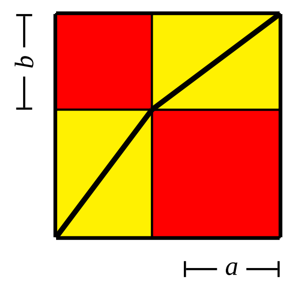


Figure 7.96: Igual en área a la figura 7.95.

680 Teorema (Pitágoras) La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a la longitud del cuadrado de la hipotenusa.

> **Demostración:** *Se presentarán varias demostraciones aquí, casi todas basadas en la disección de figuras. En todas las figuras utilizadas se presumirá que los catetos miden a,b con $b \leq a$ y que c es la medida de la hipotenusa, como en la figura 7.94.*
>
> *La primera demostración es atribuida al mismísimo Pitágoras. En la figura 7.95, el cuadrado mayor tiene área $(a+b)^2$. El cuadrado interno azul tiene área c^2. Cada uno de los triángulos rectángulos amarillos tiene área $\frac{ab}{2}$. Luego*
>
> $$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) \implies a^2 + b^2 = c^2.$$
>
> *El cálculo algebraico efectuado se puede ver geométricamente con un reordenamiento de las piezas, como en la figura 7.96, ya que ambos cuadrados tienen la misma área y descontando los triángulos amarillos, el área azul del uno es la suma de las áreas rojas del otro.*
>
> *La segunda demostración es atribuida a Bhaskara. El cuadrado mayor en la figura 7.97 tiene área c^2. Este está compuesto de cuatro triángulos rectángulos, cada uno de área $\frac{ab}{2}$ y de un cuadrado magenta, de área $(a-b)^2$.*

Luego

$$c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) \implies c^2 = a^2 + b^2,$$

dando de nuevo el teorema.

La tercera demostración es atribuida al presidente yanqui James A. Garfield. El trapecio en la figura 7.98 tiene bases a y b y altura $a+b$, de donde su área es

$$\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Pero el mismo trapecio puede ser descompuesto en dos triángulos de área $\frac{ab}{2}$ y uno de área $\frac{c^2}{2}$. Así,

$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2\left(\frac{ab}{2}\right) + \frac{c^2}{2} \implies a^2 + b^2 = c^2,$$

dando otra vez el resultado.

La cuarta demostración es una de las de los Elementos *de Euclides. Primero, $\triangle ABF \cong \triangle AEC$ por el criterio ALA, ya que $AE = AB$, $AF = AC$, y $\widehat{BAF} = \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = \widehat{CAB} + \widehat{BAE} = \widehat{CAE}$. El $\triangle ABF$ tiene base $[AF]$ y su altura desde B mide AC. Su área es por lo tanto $\frac{AC^2}{2}$. Por otra parte, $\triangle AEC$ tiene el lado $[AE]$ y altura desde C igual a AM, en donde $M = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CL}$ y $\overleftrightarrow{CL} \parallel \overleftrightarrow{AE}$. Por lo tanto, el área del $\triangle AEC$ es la mitad del área del rectángulo $AELM$. Esto quiere decir que el área AC^2 del cuadrado cuyos lados tienen longitud AC es igual al área del rectángulo $AELM$.*

De manera semejante, el área BC^2 del cuadrado cuyos lados tienen longitud BC es igual al área $BMLD$. Finalmente, los dos rectángulos $AELM$ y $BMLD$ componen el cuadrado en la hipotenusa AB.❑

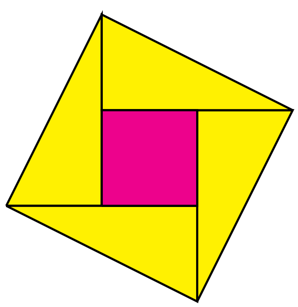


Figure 7.97: Bhaskara.

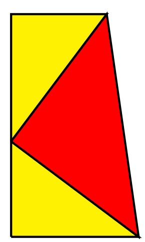


Figure 7.98: Garfield

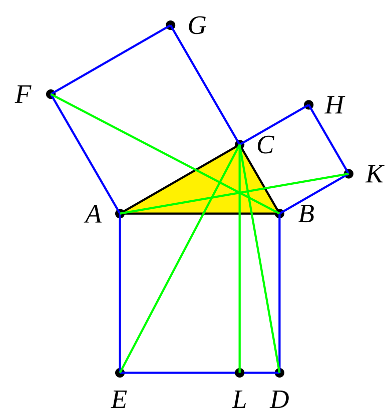


Figure 7.99: Euclides

681 Teorema (Recíproco del Teorema Pitágoras) Si en el triángulo $\triangle ABC$, $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo en C.

Demostración: *Constrúyase el $\triangle XYZ$ tal que $XZ = AC = b$, $YZ = BC = a$ y $Z = 90°$. Como $\triangle XYZ$ es rectángulo en Z, se puede aplicar el Teorema de Pitágoras y*

$$XY^2 = XZ^2 + ZY^2 = b^2 + a^2 = c^2 \implies XY = c.$$

Luego, por el criterio LLL, $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$, de donde $C = Z = 90°$. ❑

682 Ejemplo Una escalera en caracol de anchura muy fina enrosca a una columna de altura H y circunferencia C, tal como en la figura 7.100, donde el último peldaño de la escalera está directamente arriba del primero. Véase entonces que la escalera llega desde la base de la columna hasta su tope. Hallar la longitud de la escalera.

►**Resolución:** *Desenróllese la escalera, formando así un triángulo rectángulo de catetos que miden H y C. Luego la longitud de la escalera es* $\sqrt{H^2+C^2}$. ◄

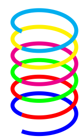


Figure 7.100: Ejemplo 682.

Tarea

683 Problema El $\triangle ABC$ es rectángulo en C. Sea D el pie de la perpendicular desde el vértice C hasta el lado $[AB]$. Se inscribe un círculo de radio r_1 en el $\triangle ACD$ y otro de radio r_2 en el $\triangle ADB$. Si el radio del círculo inscrito al $\triangle ABC$ es r, demuéstrese que

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

684 Problema Se inscribe un círculo de radio 2 en un cuadrado. Un círculo menor, de radio r es tangente tanto al círculo mayor como a dos lados del cuadrado dentro del cuadrado. Hallar r.

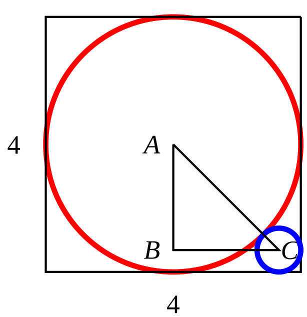


Figure 7.101: Problema 684.

685 Problema Dos círculos de radio 2 y de centros O y P son mutuamente tangentes, como en la figura 7.102. Si $[AD]$ y $[BD]$ son tangentes, hallar BD.

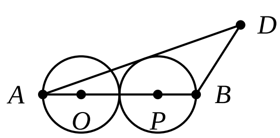


Figure 7.102: Problema 685.

686 Problema En la figura adjunta, los círculos son concéntricos, $[AB]$ es tangente al círculo interno y $AB = 20$. Hallar el área del anillo sombreado.

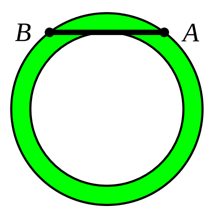


Figure 7.103: Problema 686.

687 Problema Se inscribe un círculo dentro de un cuarto de círculo, como en la figura 7.104. Si el círculo mayor tiene radio R, hallar el radio del círculo menor.

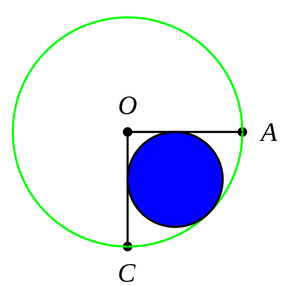


Figure 7.104: Problema 687.

7.6 Proporcionalidad y semejanza

688 Definición Una *proporción* es una aseveración acerca de la igualdad de dos razones. Así, escribimos

$$a : b = c : d \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Las siguientes aseveraciones son fácilmente demostrables.

689 Presunción Si $a : b = c : d$ y si $n > 0$ entonces,

1. $(a+b) : a = (c+d) : c$.
2. $(a-b) : a = (c-d) : c$.
3. $(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$.
4. $a : b = (a+c) : (b+d)$.
5. $a^n : b^n = c^n : d^n$.

690 Teorema Considérese una serie de paralelas cortando dos rectas. Si en una de estas rectas, las paralelas cortan segmentos de igual longitud, también cortarán a la otra en segmentos de igual longitud.

> **Demostración:** *En la figura 7.105, supóngase que $AB = CD$. Se tiene que demostrar que $A'B' = C'D'$. Ahora bien, en el trapecio $ACC'A'$ se tiene, por hipótesis que $BB' \parallel AA'$. Luego BB' biseca a AC. Por lo tanto, también biseca a $A'C'$ y $A'B' = C'D'$ por el teorema 652.* ❑

691 Teorema Una recta paralela a un lado de un triángulo que divida a sus otros dos lados, los divide proporcionalmente.

> **Demostración:** *En la figura 7.106, supóngase que*
>
> $$\frac{CA}{AB} = r.$$
>
> *Se tiene que demostrar que*
>
> $$\frac{C'A'}{A'B'} = r.$$
>
> *Presúmase primero que $r = \frac{a}{b}$, el cociente de dos enteros positivos. Luego $bCA = aAB$. Divídase a $C'A'$ en a partes y a $A'B'$ en b partes iguales. El resultado se obtiene entonces del teorema 690.*
>
> *Si r es irracional, considérese una sucesión de números racionales $r_1, r_2, r_3, \ldots$, convergiendo a r y aplíquese el resultado ya obtenido.*❑

La recíproca de este último teorema se demuestra de la misma manera que el corolario 651.

692 Presunción Si una recta divide a dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado.

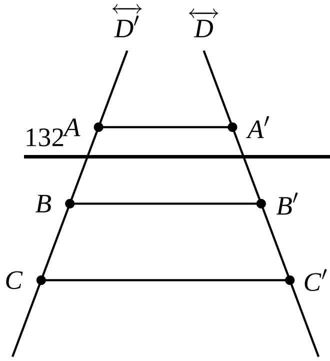


Figure 7.105: Teorema 690.

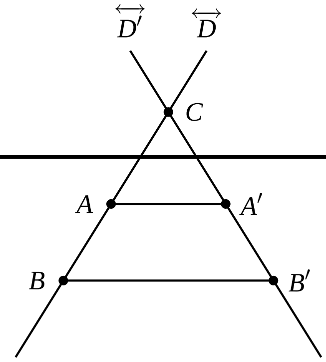


Figure 7.106: Teorema 691.

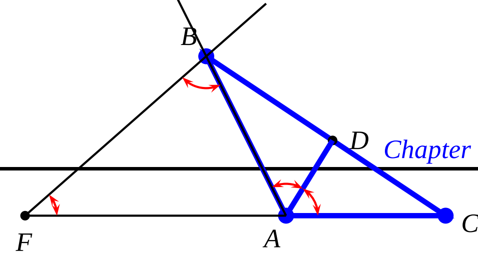


Figure 7.107: Teorema 693.

693 Teorema (Teorema de la bisectriz) En el $\triangle ABC$ sea D la intersección de la bisectriz angular del A con $[BC]$. Entonces

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

Demostración: *Trácese* $[BF] \parallel AD$*, como en la figura 7.107. Por el teorema 691,*

$$\frac{FC}{AC} = \frac{BC}{DC}.$$

Ahora bien, el $\triangle FAB$ *es isósceles en* A*, ya que por ser ángulos alternos internos* $\widehat{FBA} = \widehat{BAD}$*. Luego* $FA = AB$*. Así* $FC = FA + AC = AB + AC$*. De aquí,*

$$\frac{FC}{AC} = 1 + \frac{AB}{AC}$$

y

$$\frac{BC}{DC} = \frac{BD + DC}{DC} = 1 + \frac{BD}{DC}.$$

Por lo tanto,

$$1 + \frac{AB}{AC} = 1 + \frac{BD}{DC},$$

de donde se destila el resultado.. ❑

694 Ejemplo Los lados del $\triangle ABC$ son $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$. Sobre $D \in [AB]$, se traza una recta paralela al $[AC]$, intersecando al $[BC]$ en E. Desde E se traza una recta paralela a $[AB]$ intersecando al $[CA]$ en F. Desde F se traza una recta paralela a $[CA]$ intersecando al $[BC]$ en H. Desde H se traza una recta paralela a $[AB]$ intersecando al $[CA]$ en I. Desde I se traza una recta paralela a $[BC]$ intersecando al $[AB]$ en J. Hallar AG y BJ en términos de $BD = t$.

►**Resolución:** *Como los lados paralelos de un lado del triángulo cortan a los otros lados en segmentos proporcionales, se tiene*

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CA} = \frac{BJ}{AB},$$

luego $BJ = AG = BD = t$*, de donde* D *y* J *coinciden. Además* $BE = CH$ *y* $AF = CI$*.* ◄

695 Definición (Semejanza) Dos figuras S y T se dicen *semejantes* si mediante una serie de rotaciones, traslaciones, reflexiones, dilataciones o contracciones se puede hacer a la una coincidir con la otra. La constante de dilatación o contracción utilizada se llama *coeficiente de homotecia o de semejanza*. Si S y T son semejantes se escribe $S \sim T$.

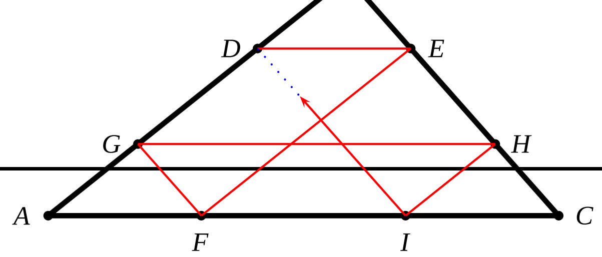


Figure 7.108: Ejemplo 694.

696 Teorema (Criterio AAA) Dos triángulos son semejantes si y sólo si sus ángulos homólogos son congruentes.

Demostración: *Sólo es necesario mostrar la suficiencia.*

Considérese el triángulo $\triangle A'B'C'$ en donde $\widehat{A'} = A$, $\widehat{B'} = B$ y $\widehat{C'} = C$. Superpóngase al $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$. Como los ángulos coinciden, los lados homólogos son paralelos. El resultado ahora se sigue del teorema 691. ❑

697 Teorema (Criterio LLL) Dos triángulos son semejantes si y sólo si sus lados homólogos son proporcionales.

Demostración: *El teorema es resultado inmediato de la presunción 692.*❑

La siguiente presunción es ahora inmediata.

698 Presunción (Criterio LAL) Dos triángulos son semejantes si y sólo dos de sus lados lados homólogos son proporcionales y los ángulos comprendidos entre estos lados son congruentes.

Las siguientes aseveraciones son ahora evidentes.

699 Presunción Si dos figuras tienen razón de semejanza $1 : \lambda$, entonces:

1. ángulos homólogos son congruentes.
2. segmentos de recta homólogos llevan una razón de $1 : \lambda$.
3. áreas homólogas llevan una razón de $1 : \lambda^2$.
4. volúmenes homólogos llevan una razón de $1 : \lambda^3$.

700 Teorema Si las rectas AB y PQ se intersecan en M entonces

$$\frac{[\triangle ABP]}{[\triangle ABQ]} = \frac{PM}{QM}.$$

Demostración: *Se observan cuatro casos, como en las figuras 7.109 a 7.112. Sin pérdida de generalidad presúmase que las áreas involucradas no son degeneradas. Así*

$$\frac{[\triangle ABP]}{[\triangle ABQ]} = \frac{[\triangle ABP]}{[\triangle AMP]} \cdot \frac{[\triangle AMP]}{[\triangle AMQ]} \cdot \frac{[\triangle AMQ]}{[\triangle ABQ]} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{PM}{QM} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{PM}{QM}.$$

❑

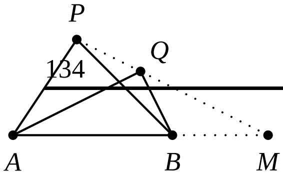


Figure 7.109: Teorema 700.

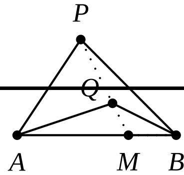


Figure 7.110: Teorema 700.

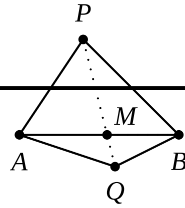


Figure 7.111: Teorema 700.

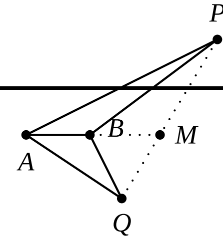


Figure 7.112: Teorema 700.

701 Ejemplo $ABCD$ es un cuadrilátero convexo tal que DA y CB se intersecan en K; AB y DC se intersecan en L; AC y KL se intersecan en G; DB y KL se intersecan en F. Demostrar que

$$\frac{KF}{FL} = \frac{KG}{GL}.$$

►**Resolución:** *Aplicaciones sucesivas del teorema 700 producen*

$$\frac{KF}{FL} = \frac{[\triangle DBK]}{[\triangle DBL]} = \frac{[\triangle DBK]}{[\triangle KBL]} \cdot \frac{[\triangle KBL]}{[\triangle DBL]} = \frac{CD}{CL} \cdot \frac{AK}{AD} = \frac{[\triangle ACD]}{[\triangle ACL]} \cdot \frac{[\triangle ACK]}{[\triangle ACD]} = \frac{[\triangle ACK]}{[\triangle ACL]} = \frac{KG}{GL}.$$

◄

702 Ejemplo Sea P un punto en el interior del $\triangle ABC$. Las semirrectas AP, BP, CP intersecan a los lados BC, CA, AB en los puntos A', B', C' respectivamente, como en la figura 7.114. Demostrar que

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1.$$

►**Resolución:** *Se tiene*

$$1 = \frac{[\triangle ABP] + [\triangle BCP] + [\triangle CAP]}{[\triangle ABC]} = \frac{[\triangle ABP]}{[\triangle ABC]} + \frac{[\triangle BCP]}{[\triangle ABC]} + \frac{[\triangle CAP]}{[\triangle ABC]} = \frac{PC'}{CC'} + \frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'},$$

gracias al teorema 700. ◄

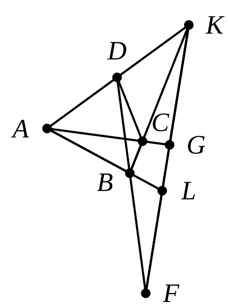


Figure 7.113: Ejemplo 701

703 Ejemplo Tres líneas rectas, cada una de ellas paralelas a los lados del $\triangle ABC$, concurren en el punto M (figura 7.115). Si las áreas de los tres triángulos resultantes dentro del $\triangle ABC$ son $[\triangle EKM] = R$, $[\triangle MQF] = S$ y $[\triangle PMN] = T$, demuéstrese que $[ABC] = (\sqrt{R} + \sqrt{S} + \sqrt{T})^2$.

►**Resolución:** *Obsérvese que $\triangle EKM \sim \triangle MQF \sim \triangle PMN$. Entonces*

$$\frac{R}{[ABC]} = \frac{EM^2}{AC^2}, \quad \frac{S}{[ABC]} = \frac{MF^2}{AC^2}, \quad \frac{T}{[ABC]} = \frac{PN^2}{AC^2}.$$

Luego

$$EM = \sqrt{\frac{R}{[ABC]}}AC, \quad MF = \sqrt{\frac{S}{[ABC]}}AC, \quad PN = \sqrt{\frac{T}{[ABC]}}AC.$$

A causa del paralelismo de rectas, $EM = AP$*, y* $MF = NC$*. Esto conlleva a*

$$EM + PN + MF = AP + PN + NC = AC.$$

De esta última igualdad se desprende que

$$\sqrt{\frac{R}{[ABC]}}AC + \sqrt{\frac{S}{[ABC]}}AC + \sqrt{\frac{T}{[ABC]}}AC = AC,$$

de donde se colige, al cancelar AC *y resolver para* $[ABC]$ *que*

$$[ABC] = (\sqrt{R} + \sqrt{S} + \sqrt{T})^2.$$

◀

704 Ejemplo En el $\triangle ABC$, A', B', C' son puntos en BC, CA, AB respectivamente tales que

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{3}.$$

K, L, M son las intersecciones de las rectas AA' y CC'; BB' y AA'; CC' y BB', respectivamente. Si el área del $\triangle ABC$ es 1, encuentre el área del $\triangle KLM$.

►**Resolución:** *Observe que*

$$1 = [\triangle ABC] = [\triangle ABL] + [\triangle LBC] + [\triangle ALC].$$

Si $[\triangle ABL] = s$*, por el teorema 700, se tiene* $[\triangle LBC] = \frac{s}{3}$ *y* $[\triangle ALC] = 3s$*. Así,*

$$s + \frac{s}{3} + 3s = 1 \implies s = \frac{3}{13}.$$

Con razonamientos semejantes se obtiene $[\triangle BCM] = [\triangle CAK] = \frac{3}{13}$*. Luego*

$$[\triangle KLM] = [\triangle ABC] - [\triangle ABL] - [\triangle BCM] - [\triangle CAK] = \frac{4}{13}.$$

◀

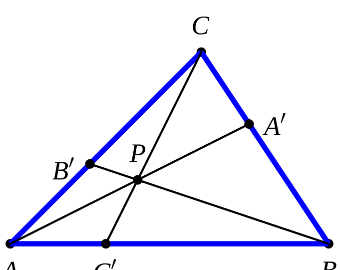


Figure 7.114: Ejemplo 702.

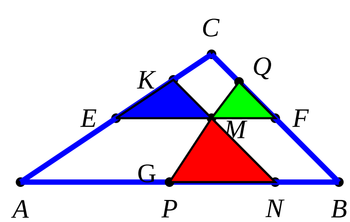


Figure 7.115: Ejemplo 703.

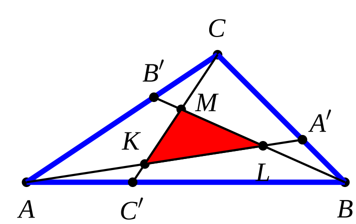


Figure 7.116: Ejemplo 704.

705 Teorema (Ptolomeo) Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Entonces se cumple la desigualdad

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

Igualdad ocurre si y solamente si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico simple, esto es, si $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ se cortan en el interior del círculo.

Demostración: *Sea E el punto único en el plano tal que $\triangle ABE$ y $\triangle ADC$ sean directamente semejantes, esto es, que existe una homotecia directa enviando $\triangle ABE$ a $\triangle ADC$. Se tiene $\dfrac{EB}{CD} = \dfrac{AB}{AD}$, de donde $BE = AB \cdot \dfrac{CD}{AD}$. Por otra parte, se tiene $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$ y $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AC}{AD}$, de donde los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle ADB$ son semejantes, y se sigue que $CE = AC \cdot \dfrac{BD}{AD}$. De la desigualdad triangular aplicada al $\triangle BCE$ se tiene $CE \leq CB + BE$, con igualdad si y solamente si C, B, E son alineados, en este orden. En reemplazando BE y CE por los valores obtenidos, se halla la desigualdad pedida. Igualdad ocurre si y solamente si $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ABE} = \pi - \widehat{ADC}$, esto es, A, B, C, D son co-cíclicos en este orden.* ❑

706 Teorema (Potencia de un punto con respecto a un círculo) Considérese un círculo de centro O y radio r y un punto P en el plano. Dada cualquier recta pasando por P y cortando el círculo en A y B, el producto $PA \cdot PB$ depende solamente de P y del círculo y no de la recta. Si $A = B$ se considera la recta tangente al círculo en A.

Demostración: *Considérese cualquier otra recta pasando por P y cortando al círculo en C y D, como en la figura 7.118. Se tiene*

$$\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{PDB}.$$

Así, los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle PDB$ son semejantes, de donde

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

de donde se sigue el resultado. ❑

El producto $PA \cdot PB$ se llama la *potencia* de P con respecto al círculo. Se tiene

$$(OP + r)(OP - r) = OP^2 - r^2.$$

Considérense dos círculos de centros O y O, como en la figura 7.119, de rayos respectivos r_1 y r_2. El conjunto

$$\{P \in \mathbb{R}^2 : PO^2 - r_1^2 = PO'^2 - r_2^2\}$$

es una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{OO'}$, como se puede verificar en utilizando el teorema de Pitágoras, llamada el *eje radical* de los círculos. Obsérvese que si los círculos se cortan en dos puntos A y B entonces su eje radical es la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Si los círculos son tangentes en A entonces su eje radical es la tangente que los separa.

707 Teorema (Teorema de los ejes radicales) Consideránse tres círculos Γ_1, Γ_2, Γ_3. Entonces sus ejes radicales Δ_1, Δ_2, Δ_3 son o bien se confunden, o bien concurrentes, o bien paralelos.

Demostración: *Un punto en dos de los ejes radicales tiene la misma potencia con respecto a los tres círculos. Por lo tanto, si dos de los ejes se confunden, también lo hace el tercero. Si dos de los ejes tienen un punto en común, este punto yace en el tercer eje también.*❑

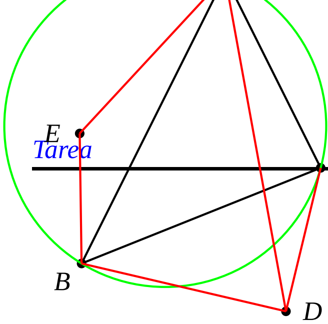


Figure 7.117: Teorema 705.

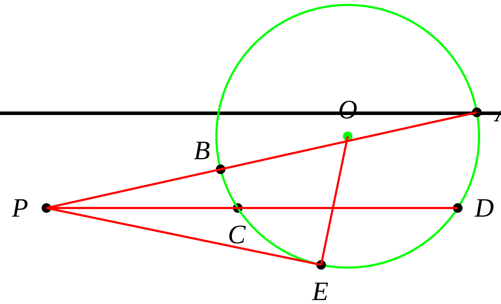


Figure 7.118: Teorema 706.

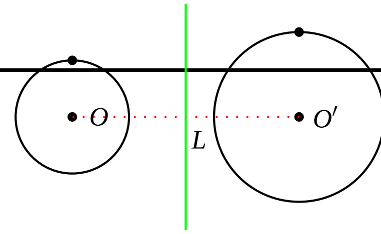


Figure 7.119: Eje radical.

Tarea

708 Problema En la figura 7.120, $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = E$ y $[AB] \parallel [EF] \parallel [CD]$. Demostrar que

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

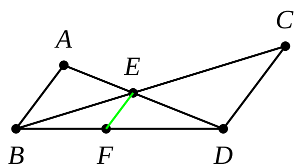


Figure 7.120: Problema 708.

709 Problema $ABCD$ es un paralelogramo. El punto E está sobre la recta $\overleftrightarrow{CD}$ más allá de D. Se traza el segmento $[BE]$, intersecando $[AD]$ en F y la diagonal $[AC]$ en G. Demostrar que

$$\frac{1}{BG} = \frac{1}{BF} + \frac{1}{BE}.$$

710 Problema $ABCD$ es un trapecio en el cual $AB = 7$ y $CD = 10$. Si E yace sobre $[AD]$ y F sobre $[BC]$, y si $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{BF}{FC} = 2$, hallar EF.

711 Problema El $\triangle ABC$ tiene lados que 13, 14 y 15 unidades. El $\triangle A'B'C'$ está dentro del $\triangle ABC$ con lados paralelos al $\triangle ABC$ y a 2 unidades de distancia de los lados de éste. Hallar el área del $\triangle A'B'C'$.

712 Problema En el triángulo agudo $\triangle ABC$, considérese la altura $[AH_A]$ y la mediana $[AM_A]$. La bisectriz angular de A corta el segmento $[BC]$ en D. Si $AB = 11$, $AC = 8$ y $m_a = 1$, hallar M_AH_A.

713 Problema En la figura 7.121, $\triangle ABC$ es rectángulo en A y $\triangle ADB$ es rectángulo en D. El punto E es el punto de intersección de los segmentos $[AD]$ y $[BC]$. Si $AC = 15$, $AD = 16$ y $BD = 12$, hállese el área del $\triangle ABE$.

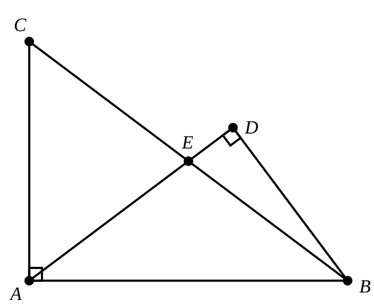


Figure 7.121: Problema 713.

714 Problema (AIME, 1992) Los puntos A', B', C' están en los lados BC, CA y AB respectivamente, del $\triangle ABC$. Dado que AA', BB' y CC', concurren en O y que la suma $\dfrac{AO}{OA'} + \dfrac{BO}{OB'} + \dfrac{CO}{OC'} = 92$, hállese el producto $\dfrac{AO}{OA'} \cdot \dfrac{BO}{OB'} \cdot \dfrac{CO}{OC'}$.

715 Problema (Canadá, 1971) $[DB]$ es una cuerda de un círculo, E es un punto sobre esta cuerda para el cual $DE = 3$ y $EB = 5$. Sea O el centro del círculo. Únase $[OE]$ y extiéndase $[OE]$ de tal manera que corte al círculo en C, como en la figura adjunta. Dado que $EC = 1$, hallar el radio del círculo.

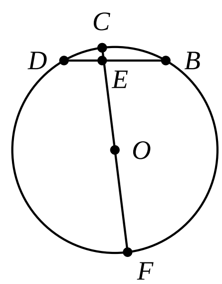


Figure 7.122: Problema 715.

716 Problema Se construye, exteriormente, cuadrados en cada lado del cuadrilátero $ABCD$ siendo P, Q, R, S los centros de los respectivos cuadrados. Demuéstrese que $PR = QS$ y que $PR \perp QS$.

717 Problema En la figura 7.123, $ABCD$ es un cuadrado, $[AN] \parallel [LC]$ y $[OB] \parallel [DM]$. Además, $AL = MB = 2$. Hallar el área, en unidades cuadradas, de la región sombreada cruzada dentro del cuadrado.

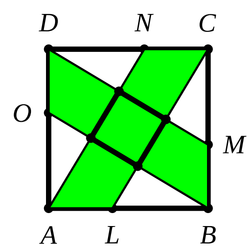


Figure 7.123: Problema 717.

718 Problema En el $\triangle ABC$, se trazan paralelas a los lados $[AC]$ y $[AB]$ a través de un punto M que yace sobre el lado $[BC]$. El área del paralelogramo resultante es $\frac{5}{18}$ del área del $\triangle ABC$. Hallar la razón en que M divide al lado $[BC]$.

719 Problema Un penacho triangular esta coloreado en verde (252 unidades), rojo (90 unidades), magenta (120 unidades), ciánico (105 unidades), amarillo y azul, como en la figura 7.124, donde se presume que las cevianas concurren. ¿De cuántas unidades cuadradas está pintado en azul y amarillo?

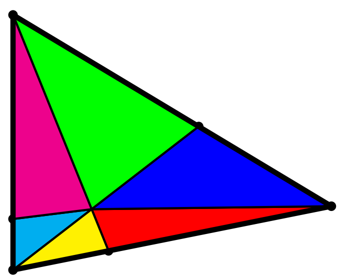


Figure 7.124: Problema 719.

720 Problema En la figura 7.125, cada uno de los triángulos $\triangle ABC, \triangle FDC, \triangle GEC$ es isósceles. Además $AB = 3AC$. El perímetro del $\triangle ABC$ es 84. D es el punto medio del segmento $[BC]$; E es el punto medio del segmento $[DC]$; F es el punto medio del segmento $[AC]$ y G es el punto medio del segmento $[FC]$. Hállese el perímetro del cuadrilátero sombreado $DEGF$.

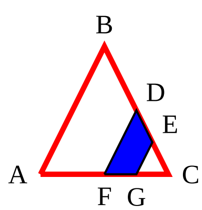


Figure 7.125: Problema 720.

721 Problema En el $\triangle ABC$, E y F yacen sobre el $[AB]$, con E entre A y F, como en la figura 7.126. Se satisface además

$$AE : EF : FB = 1 : 2 : 3.$$

Los puntos G y D yacen sobre $[CB]$ con G entre C y D. Se satisface

$$CG : GD : DB = 4 : 3 : 2.$$

Si $[FG]$ interseca al $[ED]$ en H, hallar la razón $DH : HE$.

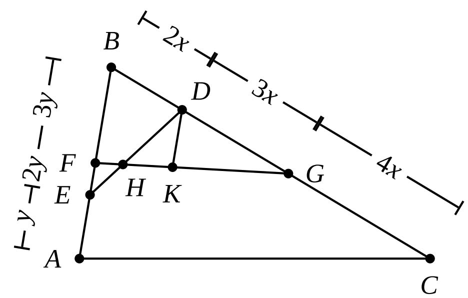


Figure 7.126: Problema 721.

722 Problema En la figura 7.127, el rectángulo $ABCD$ de área a, P, Q y R son los puntos medios de los lados $[BC]$, $[CD]$ y $[AD]$, respectivamente. M es el punto medio del segmento $[QR]$. Sea b el área del triángulo $\triangle APM$. Hállese la fracción $\frac{a}{b}$.

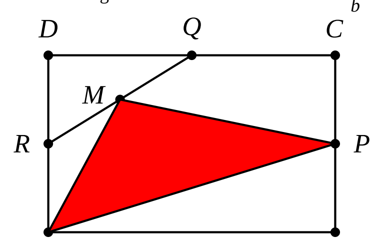


Figure 7.127: Problema 722.

7.7 Construcciones con regla y compás

Se recogen aquí algunas construcciones fundamentales.

723 Construcción Dado un segmento de recta, copiarlo.

►**Resolución:** *Para copiar el segmento $[AB]$ en el segmento congruente $[PQ]$, se observarán los siguientes pasos:*

1. *Márquese un punto P, que será un extremo de la copia.*
2. *Póngase una punta del compás sobre A.*
3. *Ajústese la anchura del compás, cosa de que la otra punta descanse sobre B. La anchura del compás es ahora AB.*
4. *Sin cambiar la anchura del compás, póngase una punta sobre P.*
5. *Sin cambiar la anchura del compás, trácese un arco de centro P.*

6. *Escójase un punto Q sobre el arco, que será el otro extremo del segmento.*
7. *Trácese una recta de P a Q.*
8. *Se concluye $AB = PQ$.*

◀

724 Construcción Dado un ángulo, copiarlo.

►**Resolución:** *El ángulo $\widehat{CAB}$ es dado y se le quiere copiar en el ángulo $\widehat{QPR}$.*

1. *Póngase P en el lugar deseado y trácese una recta a través de P en la dirección deseada.*
2. *Abra el compás a la anchura de la distancia AC y sin ajustarlo, póngalo sobre P y trácese un arco sobre la recta. Llámese Q al punto de intersección de la recta y el arco.*
3. *Con la punta del compás sobre A, póngase el otro extremo del compás sobre B, la anchura del compás ahora siendo AB.*
4. *Sin ajustar el compás, ponga la punta sobre P y trace un arco sobre la recta.*
5. *Ponga la punta del compás sobre C y el otro extremo sobre B, siendo ahora la anchura del compás la distancia CB.*
6. *Sin ajustar el compás, ponga la punta sobre Q y trace un arco cruzando el arco previamente trazado. Llámese R a la intersección de los arcos.*
7. *Usando la regla, trace el segmento de recta $[PR]$.*
8. *Se tiene $\widehat{QPR} = \widehat{CAB}$.*

◀

725 Construcción Dado un triángulo, copiarlo.

►**Resolución:** *Dado el triángulo $\triangle ABC$, construir $\triangle PQR$, con $\triangle PQR \cong \triangle ABC$.*

1. *Ponga el vértice P en cualquier lugar deseado.*
2. *Ponga la punta del compás en A y el otro extremo en B, el compás tiene ahora una anchura AB.*
3. *Trace un arco con centro P y radio AB cerca de donde se quiera colocar el vértice Q.*
4. *Marque un punto Q en el arco. Observe que $PQ = AB$.*
5. *Ponga la punta del compás en B y el otro extremo en C, el compás tiene ahora una anchura BC.*
6. *Trace un arco con centro Q y radio BC cerca de donde se quiera colocar el vértice R.*
7. *Ponga la punta del compás en C y el otro extremo en A, el compás tiene ahora una anchura CA.*
8. *Trace un arco con centro P y radio CA cerca de donde se quiera colocar el vértice R.*
9. *La intersección de estos últimos dos arcos es el vértice R.*

La construcción funciona porque $\triangle PQR \cong \triangle ABC$ ya que $PQ = AB$, $QR = BC$ y $RP = CA$. ◀

726 Construcción Dada una recta $\overleftrightarrow{L}$ y un punto R no en $\overleftrightarrow{L}$, construir, con regla y compás, una recta L' pasando por R y paralela a $\overleftrightarrow{L}$.

►**Resolución:** *Sean P y Q puntos sobre $\overleftrightarrow{L}$, e tal manera que $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{L}$. Para trazar $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$, se observarán los siguientes pasos:*

1. *Trácese una recta pasando por R y cortando a PQ en un punto arbitrario que se llamará J.*

2. *Con el compás abierto un poco más de la mitad de la distancia entre R y J, póngase un punto sobre J y trácese un arco cortando a* $\overleftrightarrow{PQ}$ *en A y a* $\overleftrightarrow{RJ}$ *en B.*
3. *Sin cambiar la anchura del compás, colóquese una punta del compás sobre R y trácese un arco, tal como en el segundo paso, cortando a* $\overleftrightarrow{RJ}$ *en* B'.
4. *Ajústese ahora el compás tan ancho como la distancia AB.*
5. *Póngase una punta del compás sobre* B'. *Trácese un arco ahora que cruce el arco existente de centro R en el punto S.*
6. *Trácese la recta* $\overleftrightarrow{RS}$
7. $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$.

La construcción funciona porque la igualdad de los ángulos correspondientes $\widehat{B'RS} = \widehat{BJA}$. ◀

727 Construcción Construir la mediatriz de un segmento.

►**Resolución:** *Para trazar la mediatriz del segmento* $[PQ]$, *se observarán los siguientes pasos:*

1. *Póngase una punta del compás sobre P.*
2. *Abra el compás a un poco más de la mitad de la distancia entre P y Q.*
3. *Sin cambiar la anchura del compás, trácense arcos por encima y por abajo del segmento con P como centro.*
4. *Sin cambiar la anchura del compás, pero ahora con Q como centro, trácense arcos por encima y por abajo del segmento, cortando al previo arco superior en A y al arco inferior previo en B.*
5. *Trácese la recta* $\overleftrightarrow{AB}$
6. $\overleftrightarrow{AB}$ *es la mediatriz de* $[PQ]$.

La construcción funciona ya que PAQB es un rombo con diagonales $[AB]$, $[PQ]$ *y las diagonales de un rombo son mutuamente perpendiculares.* ◀

728 Construcción Dada una recta y un punto sobre ella, erigir una perpendicular a la recta desde el punto.

►**Resolución:** *Se erige sobre el punto K de la recta* $\overleftrightarrow{AB}$, *una recta perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$ *pasando por K.*

1. *Abra el compás a una anchura promedio, en realidad no importa cuanto.*
2. *Sin cambiar la anchura del compás, marque dos arcos en la recta, en ambos rayos terminando en K, cortando a* $\overleftrightarrow{AB}$ *en P y Q. Note que P y Q equidistan de K.*
3. *Ensanche el compás hasta casi el doble de su actual anchura.*
4. *Con centro en P marque ahora un arco encima de K.*
5. *Sin cambiar la anchura del compás, ponga una punta del compás sobre Q y marque ahora un arco encima K con centro en Q. Este arco interseca ahora el arco previo con centro en P en el punto R.*
6. *Una ahora K con R. Entonces* $\overleftrightarrow{KR} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

◀

729 Construcción Construir una perpendicular a una recta que pase por un punto fuera de la recta.

►**Resolución:** *Sea R el punto externo a la recta* $\overleftrightarrow{AB}$. *Se construirá una perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$ *desde R.*

1. *Poner una punta del compás sobre R.*
2. *Abra el compás a un poco más de la mitad de la distancia de R a* $\overleftrightarrow{AB}$.

3. *Trace dos arcos con centro en R sobre $\overleftrightarrow{AB}$ a entrambos lados de R, intersecando a $\overleftrightarrow{AB}$ en P y Q.*
4. *Con la misma anchura en el compás, trace dos arcos uno con centro en P y otro con centro en Q, intersecándose en S.*
5. *La recta $\overleftrightarrow{RS}$ es la perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ buscada.*

◀

730 Construcción Dividir a un segmento de recta en n sub-segmentos congruentes.

►**Resolución:** *Para dividir el segmento $[AB]$ en n partes iguales:*

1. *Desde el punto A, dibujése una recta en un ángulo agudo con el segmento de recta. La inclinación exacta de la recta no importa en tanto el ángulo sea agudo.*
2. *Ponga la punta del compás en el punto A y abra el compás a una anchura un poco menor que $\frac{1}{n}$ de la longitud del nuevo segmento de recta.*
3. *Comenzando desde A, trace n arcos consecutivos sobre el nuevo segmento, creando n puntos sobre ella. El centro del k-ésimo arco es el $k-1$-ésimo punto. Llámese al último punto C.*
4. *Con el compás abierto a la anchura BC trace un arco con centro en A debajo de A.*
5. *Con el compás abierto a la anchura AC trace un arco centro en C intersecando al arco del paso anterior. Llámese D al punto de intersección.*
6. *Trace el segmento $[DB]$.*
7. *Usando la misma anchura que la utilizada para trazar arcos en el segmento AC, trácense ahora $n-1$ arcos consecutivos comenzando en D a lo largo de $[DB]$.*
8. *Únanse los puntos correspondientes a lo largo de $[AC]$ y $[DB]$.*
9. *Esto divide a $[AB]$ en n partes iguales.*

◀

731 Construcción Dado un ángulos, construir su bisectriz angular.

►**Resolución:** *Se desea bisecar al ángulo $\widehat{PQR}$.*

1. *Ponga el compás sobre el vértice Q del ángulo.*
2. *Ajuste el compás a una anchura promedio. La anchura exacta no importa.*
3. *Sin alterar la anchura del compás, trace un arco en cada rayo del ángulo, intersecando al rayo $[QP[$ en A y al rayo $[QR]$ en B.*
4. *Ponga la punta del compás en A y trace un arco en el interior del ángulo. Haga ahora lo mismo poniendo la punta en B. Llame a la intersección de los arcos el punto S*
5. *Trace una recta desde el vértice hasta el punto de intersección de los arcos.*
6. *$[QS]$ es la bisectriz buscada.*

La construcción funciona porque $\triangle QAS \cong \triangle QBS$, ya que $QA = QB$, $AS = BS$, $QS = QS$ y por lo tanto $\widehat{AQS} = \widehat{BQS}$.
◀

732 Construcción Construir el incentro e el círculo inscrito de un triángulo dado.

►**Resolución:** *Dado el $\triangle ABC$ construir I, el centro de su círculo inscrito y r, su radio.*

1. *Construya las bisectrices de dos de los ángulos del triángulos utilizando la construcción 731. La intersección de las bisectrices es el incentro I.*

2. *Desde I, construya una perpendicular a cualquiera de los lados, dígase $[AB]$, utilizando la construcción 729. El punto de intersección de esta perpendicular y el lado se denominará L. Entonces $r = IL$.*
3. *Trácese el círculo de centro I y radio r.*

◀

733 Construcción Construir el circuncentro y el circuncírculo de un triángulo dado.

►**Resolución:** *Dado el $\triangle ABC$ construir O, el centro de su circuncírculo y R, su radio.*

1. *Escogiendo cualesquiera dos de los lados, constrúyase la mediatriz de cada lado, utilizando la construcción 727.*
2. *Sea O el punto de intersección de estas dos mediatrices.*
3. *Póngase la punta del compás en O y el otro extremo en cualquier vértice del triángulo, por ejemplo, en A. Entonces $R = OA$.*
4. *Trácese el círculo de centro O y radio R.*

◀

734 Construcción Dado círculo, hallar su centro.

►**Resolución:**

1. *Con una regla, trácense dos cuerdas, tan paralelas como sea posible, en el círculo.*
2. *Construya la mediatriz de cada uno de las cuerdas, utilizando la construcción 727.*
3. *El punto de intersección de las mediatrices es el centro del círculo.*

◀

735 Construcción Dado un punto fuera de un círculo y un círculo, construir las tangentes al círculo desde el punto.

►**Resolución:** *Se considera un círculo de centro O y un punto P fuera del círculo.*

1. *Trácese el segmento OP.*
2. *Hállese el punto medio de OP. Llámese M a este punto medio.*
3. *Trácese el círculo con centro M y radio MO. Observe que este círculo interseca al círculo de centro O en dos puntos, que se denominarán A y B.*
4. *A y P son los puntos de tangencia desde P.*

La construcción funciona porque $\triangle POA$ es rectángulo en A y $\triangle POB$ es rectángulo en B. Así el radio OA es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{PA}$ y por lo tanto $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente al círculo de centro O. Se arguye de la misma manera para el punto B. ◀

736 Construcción Construir las tangentes mutuas de dos círculos.

►**Resolución:** *Considérense círculos de centro O, O' y de respectivos radios R, R'. Presúmase que $R > R'$ y en el caso contrario, cámbiense los roles de O y O'.*

1. *Constrúyase un círculo de centro O y radio $R - R'$.*
2. *Utilizando la construcción 735, construir tangentes a este círculo.*
3. *Se desplazan ahora estas tangentes R' unidades arriba y abajo de los centros. Esto resultará en dos tangentes externas a los círculos originales, que existen si $OO' > R - R'$.*

4. *Se construye ahora un círculo de centro O y radio $R+R'$.*
5. *Utilizando la construcción 735, construir tangentes a este círculo.*
6. *Se desplazan ahora estas tangentes R' unidades arriba y abajo de los centros. Esto resultará en dos tangentes internas a los círculos originales, que existen si $OO' > R+R'$.*

◀

737 Construcción Construir la cuarta proporcional de tres segmento de recta dados.

▶**Resolución:** *Dados segmentos de longitud a, b y c, se quiere hallar x tal que*

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{b}.$$

1. *Construya dos rectas suficientemente largas formando un ángulo conveniente, intersecándose en un punto, que se denominará O.*
2. *En una de las rectas, localicése un punto A tal que $OA = a$.*
3. *En la misma recta, localicése un punto B tal que $AB = b$.*
4. *En la otro recta, localicése un punto C tal que $OC = c$.*
5. *Únase A y C, formando el segmento $[AC]$.*
6. *Usando la construcción 726, constrúyase una paralela a $[AC]$ pasando por B. Esta recta intersecará a $\overleftrightarrow{OC}$ en un punto, que se denominará X.*
7. *Trácese $[BX]$.*
8. *Se tiene $x = CX$.*

La construcción funciona gracias al teorema 690. ◀

738 Construcción Dados un segmento de longitud a y otro de longitud b construir un segmento de longitud $\sqrt{ab}$.

▶**Resolución:**

1. *Sobre una recta, escójase un punto arbitrario O. Localicése un punto A tal que $OA = a$.*
2. *Localicése un punto B tal que $AB = b$.*
3. *Localicése el punto medio M del segmento $[OA]$. Trácese un semicírculo de centro M y radio MO.*
4. *Eríjase una perpendicular a $\overleftrightarrow{OB}$ en A. Esta recta intersecará al semicírculo en un punto, que se denominará X.*
5. *$AX = \sqrt{ab}$.*

◀

Tarea

739 Problema Construir un triángulo equilátero con regla y compás, si la longitud de sus lados es dada.

740 Problema Dada una recta y dos puntos del mismo lado de ella, construir un círculo que pase por los dos puntos y tangente a la recta.

7.8 Repaso de Trigonometría

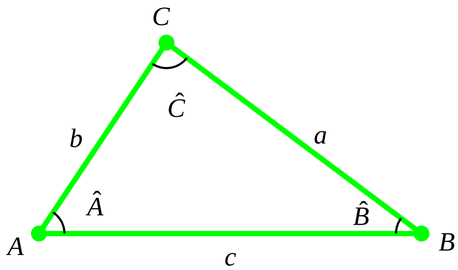


Figure 7.128: Notación para triángulos.

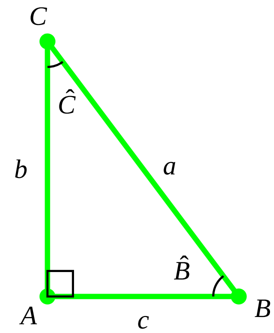


Figure 7.129: Triángulo rectángulo.

Dado el triángulo $\triangle ABC$, la medida del segmento opuesto al vértice se indicará con la minúscula del vértice correspondiente. Así pues, la medida del segmento $[AB]$ es $AB = c$, la del segmento $[BC]$ es $BC = a$ y la del segmento $[CA]$ es $CA = b$, como se indica en la figura 7.128. Tanto el ángulo en el vértice V como su medida algebraica se indicará por $\hat{V}$.

741 Definición Se $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A, como en la figura 7.129. Se definen entonces las razones trigonométricas *seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente* del ángulo $\hat{B}$ de la manera siguiente:

$$\begin{array}{lclclcl}
\operatorname{sen}\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{B}}{\text{longitud de la hipotenusa}} & = & \dfrac{b}{a} & & \\
\cos\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{B}}{\text{longitud de la hipotenusa}} & = & \dfrac{c}{a} & & \\
\tan\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{B}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{B}} & = & \dfrac{b}{c} & = & \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} \\
\csc\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{B}} & = & \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{1}{\operatorname{sen}\hat{B}} \\
\sec\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{B}} & = & \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{1}{\cos\hat{B}} \\
\cot\hat{B} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{B}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{B}} & = & \dfrac{c}{b} & = & \dfrac{\cos\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{B}}
\end{array}$$

Las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$ se definen de manera semejante:

$$\begin{array}{lclclclcl}
\operatorname{sen}\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{C}}{\text{longitud de la hipotenusa}} & = & \dfrac{c}{a} & & & = & \cos\hat{B} \\
\cos\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}}{\text{longitud de la hipotenusa}} & = & \dfrac{b}{a} & & & = & \operatorname{sen}\hat{B} \\
\tan\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{B}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}} & = & \dfrac{c}{b} & = & \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}} & = & \cot\hat{B} \\
\csc\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{C}} & = & \dfrac{a}{c} & = & \dfrac{1}{\operatorname{sen}\hat{C}} & = & \sec\hat{B} \\
\sec\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud de la hipotenusa}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}} & = & \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{1}{\cos\hat{C}} & = & \csc\hat{B} \\
\cot\hat{C} & = & \dfrac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{C}}{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{C}} & = & \dfrac{b}{c} & = & \dfrac{\cos\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{C}} & = & \tan\hat{B}
\end{array}$$

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

Table 7.1: Ángulos especiales.

Los valores del seno, coseno y tangente de $0^\circ = 0$, $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ y $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, son deducidos de inmediato al considerar varios triángulos equiláteros o isósceles. Son utilizados frecuentemente y vale la pena el memorizarlos. Consúltese el cuadro 7.1.

Como es sabido, estas razones trigonómetricas se extienden a un ángulo de magnitud arbitraria mediante las siguientes relaciones.

742 Teorema (Fórmulas de simetría) Sea θ un ángulo arbitrario. Las funciones seno y tangente son impares:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta; \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

La función coseno es par:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta.$$

743 Teorema (Fórmulas de periodicidad) Sea θ un ángulo arbitrario, medido en radianes y $n \in \mathbb{Z}$ un entero arbitrario. Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + 2n\pi) = \operatorname{sen}\theta; \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta; \quad \tan(\theta + n\pi) = \tan\theta.$$

744 Teorema (Fórmulas de complementareidad) Sea θ un ángulo arbitrario, medido en radianes. Entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta.$$

En el triángulo $\triangle ABC$ de la figura 7.129 se cumple la relación de Pitágoras

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

de donde se obtiene el teorema siguiente.

745 Teorema (Fórmulas Pitagóricas) Sea θ un ángulo arbitrario. Entonces

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1; \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta; \quad \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta.$$

746 Ejemplo Dado que

$$3\operatorname{sen}x + 4\cos x = 5,$$

encontrar $\operatorname{sen}x$ y $\cos x$.

►**Resolución:** *Se tiene*

$$3\,\mathrm{sen}\,x + 4\cos x = 5 \Longleftrightarrow \mathrm{sen}\,x = \frac{5-4\cos x}{3}.$$

Utilizando las relaciones pitagóricas se obtiene

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \left(\frac{5-4\cos x}{3}\right)^2 = 1 \quad & \Longrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{25-40\cos x+16\cos^2 x}{9} = 1 \\
& \Longrightarrow \quad 9\cos^2 x + 25 - 40\cos x + 16\cos^2 x = 9 \\
& \Longrightarrow \quad 25\cos^2 x - 40\cos x + 16 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad (5\cos x - 4)^2 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Además,

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{5-4\cos x}{3} = \frac{5-\frac{16}{5}}{3} = \frac{3}{5}.$$

◄

747 Teorema (Fórmulas de área) Sea $\triangle ABC$ un triángulo arbitrario. Denótese por $[\triangle ABC]$ el área del $\triangle ABC$. Entonces

$$[\triangle ABC] = \frac{ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C}}{2} = \frac{bc\,\mathrm{sen}\,\hat{A}}{2} = \frac{ca\,\mathrm{sen}\,\hat{B}}{2}.$$

Demostración: *Denótese por H_A, H_B y H_C los pies de las perpendiculares a los segmentos $[BC]$, $[CA]$ y $[AB]$, respectivamente. Denótese por h_a, h_b y h_c las medidas de las alturas $[AH_A]$, $[BH_B]$ y $[CH_C]$, respectivamente. Entonces*

$$[\triangle ABC] = \frac{ch_c}{2}.$$

Pero de la figura 7.8 se ve que $h_c = a\,\mathrm{sen}\,\hat{B}$ y por tanto,

$$[\triangle ABC] = \frac{ch_c}{2} = \frac{ca\,\mathrm{sen}\,\hat{B}}{2},$$

probando una de las fórmulas. Las otras fórmulas se obtienen en permutando los lados.❑

748 Teorema (Fórmulas de la adición) Sean α y β ángulos arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) &= \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha, \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp (\tan\alpha)(\tan\beta)}.
\end{aligned}$$

Demostración: *Tan sólo se demostrará que*

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha+\beta < \pi,$$

dejando el resto a cargo del lector. En la figura 7.8, $\hat{C} = \alpha + \beta$, con $\alpha = \widehat{ACH_C}$ y $\beta = \widehat{H_CCB}$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{ab\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{2} &= [\triangle ABC] \\
&= [\triangle AH_CC] + [\triangle CH_CB] \\
&= \frac{ah_c\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2} + \frac{h_cb\,\mathrm{sen}\,\beta}{2},
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{h_c}{b}\operatorname{sen}\alpha+\frac{h_c}{a}\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha,$$

como se quería demostrar. ❑

749 Teorema (Regla del coseno de Al-Kashi) En el triángulo $\triangle ABC$ se observan las siguientes relaciones:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A},$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\hat{B},$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}.$$

Demostración: *Presúmase primero que* $0<\hat{B}\leq\frac{\pi}{2}$, *como en la figura 7.8. Obsérvese que por el teorema de Pitágoras*

$$\begin{aligned} c^2 &= (AH_C+H_CB)^2 \\ &= (AH_C)^2+(H_CB)^2+2(AH_C)(H_CB) \\ &= b^2-(h_c)^2+a^2-(h_c)^2+2(b\cos\hat{A})(c-AH_C) \\ &= b^2-(h_c)^2+a^2-(h_c)^2+2bc\cos\hat{A}-2AH_Cb\cos\hat{A} \\ &= b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}-2(AH_C)^2-2(h_c)^2 \\ &= b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}-2b^2 \\ &= -b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$a^2=c^2+b^2-2bc\cos\hat{A}.$$

Presúmase ahora que $\hat{B}>\frac{\pi}{2}$, *como en la figura 7.131. Se tiene*

$$\begin{aligned} c^2 &= (AH_C-BH_C)^2 \\ &= (AH_C)^2+(H_CB)^2-2(AH_C)(H_CB) \\ &= b^2-(h_c)^2+a^2-(h_c)^2-2(AH_C-c)(b\cos\hat{A}) \\ &= b^2-(h_c)^2+a^2-(h_c)^2+2bc\cos\hat{A}-2bAH_C\cos\hat{A} \\ &= b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}-2(AH_C)^2-2(h_c)^2 \\ &= b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}-2b^2 \\ &= -b^2+a^2+2bc\cos\hat{A}, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$a^2=c^2+b^2-2bc\cos\hat{A}.$$

Las otras identidades se obtienen en permutando los lados. ❑

750 Teorema (Fórmula de Herón) Si $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semi-perímetro del $\triangle ABC$, entonces su área viene dada por

$$[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Demostración: *Se tiene*

$$[ABC] = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\hat{C},$$

y así $16[ABC]^2 = 4a^2b^2\operatorname{sen}^2\hat{C}$. *Ahora bien,* $\operatorname{sen}^2\hat{C} = 1-\cos^2\hat{C}$, *de donde*

$$16[ABC]^2 = 4a^2b^2(1-\cos^2\hat{C}).$$

Por la regla del coseno,

$$\cos^2\hat{C} = \frac{(c^2-a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}.$$

De aquí se obtiene

$$\begin{aligned}16[ABC]^2 &= 4a^2b^2-(c^2-a^2-b^2)^2\\ &= (2ab-c^2+a^2+b^2)(2ab+c^2-a^2-b^2)\\ &= ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)\\ &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)\\ &= (2s)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a),\end{aligned}$$

y al dividir por 16 *y tomar raíces cuadradas se obtiene el resultado.* ❑

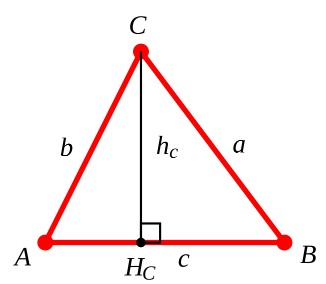


Figure 7.130: Fórmulas de área.

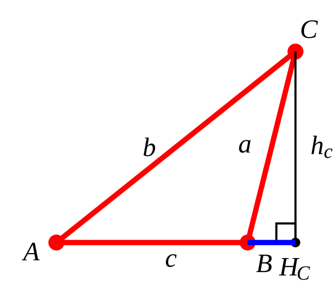


Figure 7.131: Regla de Al-Kashi.

751 Teorema (Regla del seno) En el triángulo $\triangle ABC$ se observan las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

Demostración: *Se considerarán por separado los casos cuando* $\hat{B}$ *es agudo u obtuso. Presúmase primero que* $0 < \hat{B} \leq \frac{\pi}{2}$, *como en la figura 7.8. Entonces*

$$a\operatorname{sen}\hat{B} = h_c = b\operatorname{sen}\hat{A} \implies \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}.$$

Que estas dos cantidades son iguales a $\dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$ *se observa al considerar, por ejemplo, la altura* BH_B.

Presúmase ahora que $\hat{B} > \dfrac{\pi}{2}$, *como en la figura* 7.131. *Se tiene*

$$a\operatorname{sen}(\pi - \hat{B}) = h_c = b\operatorname{sen}\hat{A}.$$

Pero por las fórmulas de la adición

$$a\operatorname{sen}(\pi - \hat{B}) = a\operatorname{sen}\pi\cos\hat{B} - \operatorname{sen}\hat{B}\cos\pi = a\operatorname{sen}\hat{B}$$

y así,

$$a\operatorname{sen}\hat{B} = b\operatorname{sen}A \implies \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}},$$

obteniendo nuevamente el resultado. ❑

752 Ejemplo Hállese el valor exacto de $\cos\dfrac{\pi}{5}$ y $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

►**Resolución:** *Considérese un pentágono regular* $ABCDE$. *Sea* x *la longitud de uno de sus lados. Recuérdese que la sección áurea* τ *satisface*

$$\tau > 0, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1+\tau} \implies \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Denótese por F *el punto de intersección de* $[AC]$ *and* $[BE]$. *Como* $[AC] \parallel [DE]$, $\widehat{FCE} = \widehat{CED}$ *y por lo tanto* $\triangle FCD \equiv \triangle DEC$. *Así* $FC = CD = x$. *Obsérvese que* $\triangle FAB$ *es isósceles y semejante al* $\triangle FCE$. *Poniendo* $t = AF$ *y observando que* $CE = CA = x + t$, *se tiene*

$$\frac{FA}{FC} = \frac{BA}{CE} \implies \frac{t}{x} = \frac{x}{t+x} \implies \frac{1}{\frac{x}{t}} = \frac{\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}} \implies \frac{x}{t} = \tau.$$

Ahora bien, como $\widehat{FCE} = \widehat{CED}$ *y* $\widehat{BCA} = \widehat{FCE}$, *se tiene* $\widehat{BCA} = \widehat{FCE} = \widehat{CED} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5}$. *Esto quiere decir que* $\widehat{FCE} = \dfrac{3\pi}{5}$ *y luego* $\widehat{ABF} = \widehat{FAB} = \dfrac{\pi}{5}$. *Erigiendo una perpendicular desde* F *hasta* $[AB]$, *se deduce del* $\triangle FAB$,

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\frac{x}{2}}{t} = \frac{x}{2t} = \frac{\tau}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

De aquí se sigue, en observando que $\tau^2 = \tau + 1$,

$$\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\,\frac{\tau}{2}^{\,2} - 1 = \frac{\tau^2}{2} - 1 = \frac{\tau^2-2}{2} = \frac{\tau-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Cabe además notar que

$$\cos\frac{3\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

◄

753 Ejemplo Considérese un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 1, y a su vez, el pentagrama regular obtenido al unir alternadamente los vértices del pentágono, como en la figura 7.133.

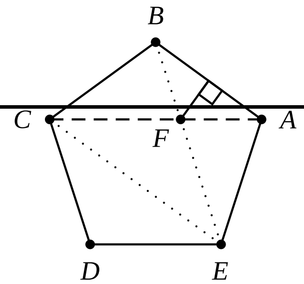


Figure 7.132: Ejemplo 752.

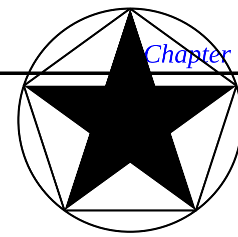


Figure 7.133: Ejemplo 753.

1. Calcule el área del pentágono.
2. Calcule el perímetro del pentágono.
3. Calcule el área del pentagrama.

►**Resolución:** *El área del pentágono es* 5 *veces el área de cualquier triángulo formado por el centro del pentágono y dos de sus vértices consecutivos. Nótese que tal triángulo es isósceles, con ambos lados iguales de medida* 1 *y con el ángulo entre estos lados de medida* $\frac{2\pi}{5}$*. Así pues, el área del pentágono es*

$$5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}.$$

Por el ejemplo 752,

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{5}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{5+\sqrt{5}}{8},$$

de donde el área del pentágono es

$$\frac{25+5\sqrt{5}}{16}.$$

Para obtener el perímetro del pentágono, sea x *la medida de uno de sus lados. Considerando el triángulo isósceles formado al unir los extremos de este lado con el centro del pentágono, y viendo que los lados iguales miden* 1*, se obtiene, usando la regla de los cosenos, que*

$$x^2=1^2+1^2-2(1)(1)\cos\frac{2\pi}{5}=2-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\implies x=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

◄

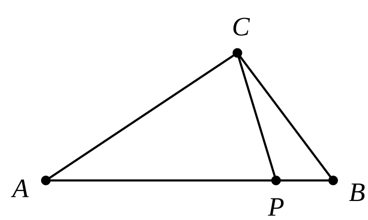


Figure 7.134: Teorema de la bisectriz angular.

754 Teorema (Forma trigonométrica del teorema de la bisectriz) En el $\triangle ABC$ sea P un punto en la recta BC. Entonces

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BA \operatorname{sen} \widehat{BAP}}{CA \operatorname{sen} \widehat{PAC}}.$$

Demostración: *Úsese la ley de los senos en el $\triangle APB$:*

$$\frac{BP}{\operatorname{sen} \widehat{BAP}} = \frac{AB}{\operatorname{sen} \widehat{APB}}$$

y en el $\triangle APC$:

$$\frac{PC}{\operatorname{sen} \widehat{PAC}} = \frac{AC}{\operatorname{sen} \widehat{CPA}}.$$

Luego

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB \operatorname{sen} \widehat{BAP} / \operatorname{sen} \widehat{APB}}{AC \operatorname{sen} \widehat{PAC} / \operatorname{sen} \widehat{CPA}}.$$

Ya que $\widehat{APB} + \widehat{CPA} = \pi$, se tiene $\operatorname{sen} \widehat{APB} = \operatorname{sen} \widehat{CPA}$. Cancelando

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB \operatorname{sen} \widehat{BAP}}{AC \operatorname{sen} \widehat{PAC}}.$$

❑

755 Ejemplo El cuadrado $ABCD$ tiene lado 1. Se trazan cuatro cuartos-de-círculo con centros en los vértices del cuadrado y de radio 1. Hallar el área del cuadrilátero curvilíneo formado por la intersección de los arcos de círculo. Véase la figura 7.135.

►**Resolución:** *Obsérvese que $AF = AE = 1$, siendo radios de círculos unitarios. Además, si O es el centro de la diagonal $[AC]$, $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{6}$ porque el arco $\widehat{BD}$ es trisecado por $[AE]$ y $[AF]$. El área del sector circular AFE es así*

$$\frac{1}{2}(1)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Ahora bien, de $|\operatorname{sen} x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$, se obtiene

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

El área del $\triangle AEO$ es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{8} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

El área buscada es finalmente

$$4\left(\frac{\pi}{12} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{8}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1.$$

◄

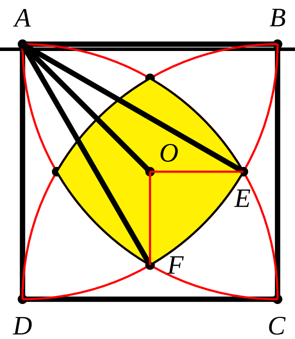


Figure 7.135: Ejemplo 755.

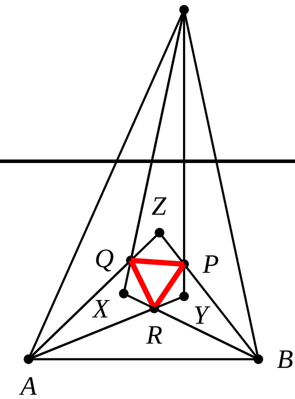


Figure 7.136: Teorema 756.

756 Teorema (Morley) Los pares adyacentes de las trisectrices de los ángulos de un triángulo siempre se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero.

Demostración: *Póngase $A = 3a$, $B = 3b$ y $C = 3c$. Sea R el circunradio del $\triangle ABC$. Por la ley de los senos, $BC = 2R\operatorname{sen}(3a)$. Aplicando ahora dicha ley al $\triangle BPC$,*

$$\begin{aligned} BP/\operatorname{sen}(c) &= BC/\operatorname{sen}(\pi - b - c) = 2R\operatorname{sen}(3a)/\operatorname{sen}(b+c) && (7.2)\\ &= 2R\operatorname{sen}(3a)/\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - a), && (7.3)\end{aligned}$$

de donde

$$BP = 2R\operatorname{sen}(3a)\operatorname{sen}(c)/\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - a)\ .$$

Combinando esto con la identidad anterior,

$$\operatorname{sen}(3a) = 4\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + a)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - a)$$

y así se obtiene

$$BP = 8R\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(c)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + a)\ .$$

De igual manera,

$$BR = 8R\operatorname{sen}(c)\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + c)\ .$$

Por la ley de los cosenos,

$$PR^2 = BP^2 + BR^2 - 2BP\cdot BR\cos(b)$$
$$= 64\operatorname{sen}^2(a)\operatorname{sen}^2(c)[\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{3}+a) + \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{3}+c) - 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+a)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+c)\cos(b)]\ .$$

Pero como

$$(\frac{\pi}{3}+a) + (\frac{\pi}{3}+c) + b = \pi\ .$$

se sigue que

$$\operatorname{sen}^2(b) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{3}+a) + \operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{3}+c) - 2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+a)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}+c)\cos(b),$$

de donde

$$PR = 8R\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\ .$$

Como esta expresión es simétrica en a, b y c, se colige que

$$PR = RQ = QP$$

as claimed. ❑

Tarea

757 Problema Dos círculos de radio R son tangentes externamente. Ambos círculos son también tangentes internamente a un triángulo rectángulo de catetos de longitud 3 y 4, como en la figura 7.137. Hallar R.

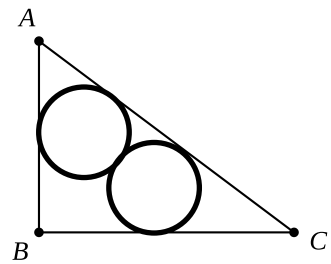


Figure 7.137: Problema 757.

758 Problema El $\triangle ABC$ es tal que la altura desde A mide lo mismo que la suma de las longitudes de las alturas desde B y C. Demostrar que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{\operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} C}.$$

759 Problema Demostrar que si un triángulo de área A es tal que el producto de las longitudes de dos sus medianas es $\frac{3}{2}A$, entonces estas dos medianas son perpendiculares.

760 Problema Si α, β, γ son los ángulos internos de un triángulo, demostrar que

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

761 Problema (Eőtvős, 1897) Si α, β, γ son los ángulos internos de un triángulo arbitrario, demostrar que

$$(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2})(\operatorname{sen}\frac{\beta}{2})(\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}) \le \frac{1}{8}.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

762 Problema Sean α, β, γ, los ángulos internos de un triángulo. Dado que

$$\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha) = 0,$$

demostrar que el triángulo es isósceles.

763 Problema Un rombo tiene lados de longitud s y diagonales de longitud d, d'. Si $s = \sqrt{dd'}$, hallar la medida del ángulo agudo entre los lados del rombo.

764 Problema Dos rombos congruentes son sobrepuestos de tal manera que la diagonal mayor del uno yace sobre la diagonal menor del otro. La intersección resulta en un octágono convexo de lados congruentes. Determine la razón de la diagonal mayor a la diagonal menor de tal manera que el octágono sea regular.

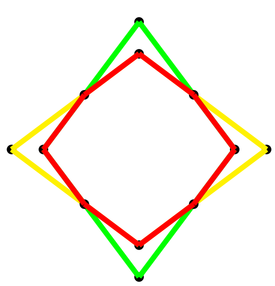


Figure 7.138: Problema 764.

765 Problema Demostrar que

$$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ)\cdots(1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 45^\circ) = 2^{23}.$$

766 Problema Sean α, β, γ reales tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Demúéstrese que

$$1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

y que

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1.$$

767 Problema Calcúlese $\tan p - \tan q$. Dedúzcase

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$.

768 Problema Demostrar que

$$\tan 51^\circ - \cot 51^\circ = 2\tan 12^\circ.$$

769 Problema Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \operatorname{sen}^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{4}\left(3^n \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^n} - \operatorname{sen}\alpha\right).$$

770 Problema Probar que $\cot x - 2\cot 2x = \tan x$ y que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{\alpha}{2^k} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n} - 2\cot 2\alpha.$$

771 Problema (AHSME, 1991) El triángulo equilátero $\triangle ABC$ se ha doblado de tal manera que ahora el vértice A descansa sobre el punto A' del segmento $[BC]$, tal como en la figura 7.139. Si $BA' = 1$ y $A'C = 2$, hállese la longitud del doblez PQ.

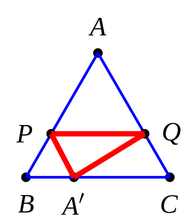


Figure 7.139: Problema 771.

772 Problema Demostrar que en el $\triangle ABC$ se satisface

$$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \operatorname{sen}^2\hat{B} = \operatorname{sen}^2\hat{C}$$

si y solamente si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

773 Problema Sean α,β ángulos agudos. Demostrar que

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta),$$

si y sólo si $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

774 Problema Hallar el valor exacto de

$$\operatorname{sen}^2 1^\circ+\operatorname{sen}^2 2^\circ+\cdots+\operatorname{sen}^2 90^\circ.$$

775 Problema Sea $x+y+z=90^\circ$. Determínese

$$(\tan x)(\tan y)+(\tan y)(\tan z)+(\tan z)(\tan x).$$

776 Problema Si $a+b+c=36^\circ$, demostrar que

$$\tan 5a+\tan 5b+\tan 5c-(\tan 5a)(\tan 5b)(\tan 5c)=0.$$

777 Problema En el $\triangle ABC$, probar que $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}$.

778 Problema Si en el $\triangle ABC$, $a=5$, $b=4$ y $\cos\widehat{(A-B)}=\frac{31}{32}$, demostrar que $\cos\hat{C}=\frac{1}{8}$ and that $c=6$.

779 Problema Sea $ABCDEFG$ un heptágono regular. Considérense las distancias $\alpha=AB$, $\beta=AC$, $\gamma=AD$. Demostrar que

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}.$$

7.9 Repaso de Geometría Analítica

En esta sección se desarrollarán las ecuaciones canónicas de círculos y rectas en el plano.

780 Definición El *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}.$$

Aquí x es la *abscisa* y[3] y la *ordenada*. Un *punto del plano* A es un par ordenado de números reales $A=(a_1,a_2)$.

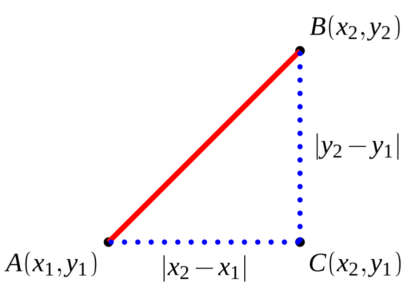


Figure 7.140: Distancia entre dos puntos.

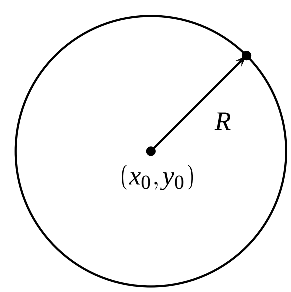


Figure 7.141: El círculo.

Considérese dos puntos $A=(x_1,y_1),B=(x_2,y_2)$ en el plano, como en la figura 7.140. Construyendo los segmentos $[CA]$ y sec BC con $C=(x_2,y_1)$, se puede hallar la longitud del segmento $[AB]$, esto es, la distancia de A a B, en utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$AB^2=AC^2+BC^2 \implies AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Esto motiva la siguiente definición:

781 Definición Sean $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ puntos en el plano cartesiano. La *distancia euclídea entre A y B*, o la *longitud o norma* del segmento $[AB]$, es la cantidad

$$\boxed{AB=\mathbf{d}\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.} \tag{7.4}$$

Gracias a la fórmula de la distancia se deduce el teorema siguiente.

[3]Se lee la letra como "ye" y no "i griega." Por tanto se utiliza la conjunción "y" y no "e."

782 Teorema La ecuación cartesiana canónica de un círculo de radio $R > 0$ y centro (x_0, y_0) es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{7.5}$$

Demostración: *El punto (x, y) pertenece a un círculo de radio $R > 0$ si y sólo si su distancia al centro del círculo es R. Luego se requiere*

$$\begin{array}{rcl} \iff \quad \mathbf{d}\langle (x,y),(x_0,y_0)\rangle & = & R \\ \iff \quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} & = & R \quad , \\ \iff \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 & = & R^2 \end{array}$$

obteniendo el resultado. Véase la figura 7.141.❑

783 Definición Tres puntos A, B, C son *colineales* si los tres están la misma recta.

784 Definición El punto B *está entre* los puntos A y B si los tres puntos son colineales y

$$AB + BC = AC.$$

Sean a y b constantes reales. El conjunto

$$\{(a,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

tiene abscisa constante, y recorre paralelamente al eje de y. De igual manera, el conjunto

$$\{(x,b) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

tiene ordenada constante, y recorre paralelamente al eje de x. Esto conlleva a la siguiente definición.

785 Definición La ecuación canónica de una recta vertical es $x = a$, en donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. La ecuación canónica de una recta horizontal es $y = b$, en donde $b \in \mathbb{R}$ es una constante.

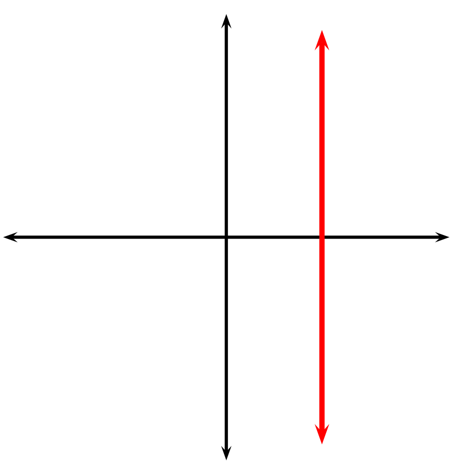


Figure 7.142: Recta vertical.

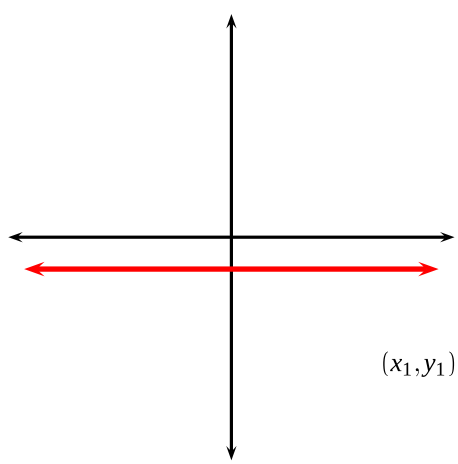


Figure 7.143: Recta horizontal.

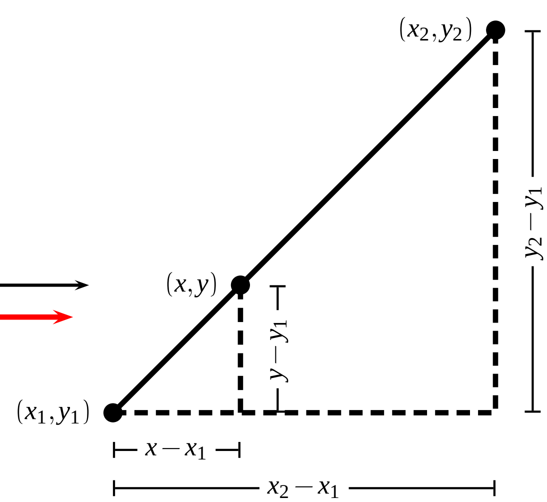


Figure 7.144: Teorema 786.

Se determinará ahora la ecuación de una recta inclinada.

786 Teorema La ecuación cartesiana de toda recta no vertical en el plano es de la forma $y = mx + k$, en donde $m \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ son constantes.

Recíprocamente, los puntos del plano ligados por la ecuación $y = ax + b$, en donde a, b son constantes reales, forman una recta.

Demostración: *Si la recta fuere paralela al eje de x, esto es, si fuere horizontal, entonces su ecuación sería de la forma $y = b$, end donde b es una constante real y entonces se puede tomar $m = 0$ y $k = b$. Considérese ahora una recta no paralela a ninguno de los ejes, como en la figura 7.144, y pertenezcan los puntos (x,y), (x_1,y_1), (x_2,y_2) a dicha recta. De triángulos semejantes se observa que*

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1},$$

y masajeando un poco se colige que

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x - x_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + y_1,$$

de donde se puede tomar

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad k = -x_1 \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + y_1.$$

Recíprocamente, considérense números reales $x_1 < x_2 < x_3$. Póngase $P = (x_1, ax_1 + b)$, $Q = (x_2, ax_2 + b)$ y $R = (x_3, ax_3 + b)$, que pertenecen a la gráfica de ecuación $y = ax + b$. Se demostrará que

$$\mathbf{d}\langle P, Q\rangle + \mathbf{d}\langle Q, R\rangle = \mathbf{d}\langle P, R\rangle,$$

esto es, los puntos P, Q y R son colineales. Como los puntos P, Q, R son arbitrarios, se deduce pues que la gráfica de la ecuación $y = ax + b$ es una recta. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\langle P, Q\rangle &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
\mathbf{d}\langle Q, R\rangle &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2} = |x_3 - x_2|\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \\
\mathbf{d}\langle P, Q\rangle &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{d}\langle P, Q\rangle + \mathbf{d}\langle Q, R\rangle = \mathbf{d}\langle P, R\rangle.$$

❑

787 Definición La cantidad $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en el teorema 786 es la *pendiente o gradiente de la recta que pasa por* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2). Como $y = m(0) + k$, el punto $(0, k)$ es el intercepto del eje de y de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

☞ *Una recta horizontal tiene pendiente* 0. *Una recta vertical tiene pendiente infinita.*

De las figuras 7.145 y 7.146 se puede percatar que si la recta L tiene ecuación cartesiana $L : y = mx + k$ y si θ es el ángulo que L forma con la parte positiva del eje de x, entonces

$$m = \tan\theta, \qquad \theta \in [0; \pi[. \tag{7.6}$$

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $m = \infty$.

788 Definición Sean A y B puntos distintos en el plano. La *dirección* de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es el ángulo que $\overleftrightarrow{AB}$ forma con la parte positiva del eje de x.

Las observaciones anteriores proporcionan de inmediato el siguiente teorema.

789 Teorema Dos rectas son paralelas si y solamente si tienen la misma pendiente.

La condición para perpendicularidad es un poco más difícil de demostrar.

790 Teorema Dos rectas inclinadas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

Demostración: *Se quiere demostrar que $L_1 : y = mx + k$ es perpendicular a $L_2 : y = m_1x + k_1$ si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m}$. Refiérase a la figura 7.147. Ya que el trasladar rectas no afecta el ángulo entre ellas, se podrá asumir sin pérdida de generalidad que tanto $L_1 : y = mx + k$ como $L_2 : y = m_1x + k_1$ se intersecan en $(0,0)$, en cuyo caso $k = k_1 = 0$. Ahora bien, la recta $y = mx$ se encuentra con la recta vertical $x = 1$ en $(1,m)$ y la recta $y = m_1x$ se encuentra con esta misma vertical en $(1,m_1)$. Si las rectas fuesen perpendiculares el Teorema de Pitágoras daría*

$$(m - m_1)^2 = (1 + m^2) + (1 + m_1^2),$$

que simplificando resulta en $mm_1 = -1$.

La recíproca se obtiene de la recíproca del Teorema de Pitágoras. ❑

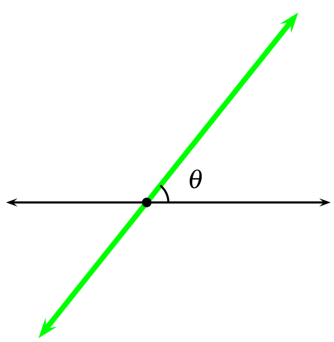


Figure 7.145: Ángulo con el eje de x.

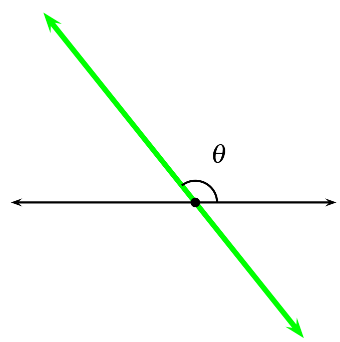


Figure 7.146: Ángulo con el eje de x.

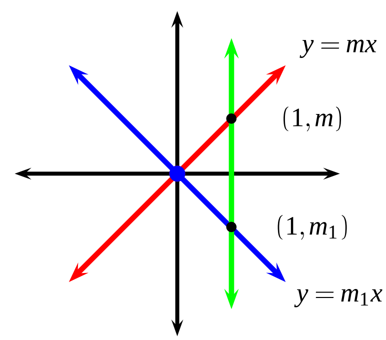


Figure 7.147: Teorema 790.

Se desarrollará ahora una serie de resultados que culminarán en la demostración de la desigualdad triangular en el plano.

791 Lema (Desigualdad de Cauchy) Sean a, b, x, y números reales. Entonces

$$(ax \pm by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2),$$

con igualdad si y sólo si (a, x) y (b, y) son proporcionales.

Demostración: *Se tiene*

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax \pm by)^2 &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 \mp 2axby - b^2y^2 \\
&= a^2y^2 + b^2x^2 \mp 2abxy \\
&= (ay \pm bx)^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Igualdad ocurrirá si y sólo si $ay = \pm bx$. Si $by \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, esto es (a,x) es proporcional a (b,y). Si $b = 0$, entonces $ay = 0x$, y, o bien $a = 0$ o bien $y = 0$. En uno y otro caso es

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax \pm by)^2,$$

y se obtiene el resultado. Si $y = 0$ es también claro el resultado. ❑

792 Lema Póngase $A = (a_1,a_2)$, $B = (b_1,b_2)$ y $C = (c_1,c_2)$. Entonces A, B y C son colineales si y sólo si (c_2-b_2, b_2-a_2) y (c_1-b_1, b_1-a_1) son proporcionales.

Demostración:

$\Longrightarrow$ *Pase la recta de ecuación $y = mx+k$ por A, B y C. Luego*

$$a_2 = a_1x+k, \qquad b_2 = b_1x+k, \qquad c_2 = c_1x+k,$$

y así

$$b_2-a_2 = m(b_1-a_1), \quad c_2-b_2 = m(c_1-b_2) \implies (c_2-b_2, b_2-a_2) = m(c_1-b_1, b_1-a_1),$$

estableciendo la proporcionalidad.

$\Leftarrow$ *Supóngase ahora que (c_2-b_2, b_2-a_2) y (c_1-b_1, b_1-a_1) son proporcionales, dígase*

$$(c_2-b_2, b_2-a_2) = t(c_1-b_1, b_1-a_1).$$

Hay dos casos, o bien $0 = c_1-b_1 = b_1-a_1$ en cuyo caso $c_1 = b_1 = a_1$ y A, B, C están alineados en la misma recta vertical al tener todos la misma abscisa, o bien uno de entre c_1-b_1 y b_1-a_1 no es cero. Súpongase que $c_1-b_1 \neq 0$, siendo el caso $b_1-a_1 \neq 0$ de manejo idéntico. Se tiene pues

$$\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1} = t, \qquad b_2-a_2 = t(b_1-a_1)$$

Luego los puntos B y C pasan por la recta de pendiente t, dígase

$$y = tx+k.$$

Cuando $x = b_1$, deberá ser $y = b_2$ y así

$$b_2 = tb_1+k \implies k = b_2-b_1t.$$

Luego B y C están sobre la recta de ecuación

$$y = tx+b_2-b_1t.$$

Falta ahora demostrar que A también está en esta recta. Pero para $x = a_1$ se tiene

$$y = a_1t+b_2-b_1t = b_2-t(b_1-a_1) = b_2-(b_2-a_2) = a_2,$$

que quiere decir que $(a_1,a_2) = A$ también está sobre la recta, terminando la demostración.

❑

793 Teorema (Desigualdad del triángulo) Sean A, B, C puntos en el plano (no necesariamente colineales). Entonces

$$AB+BC \geq AC.$$

La igualdad ocurre si y sólo si los tres puntos son colineales.

Demostración: *Póngase $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$ y $C=(c_1,c_2)$. Por el lema 791,*

$$(c_1-b_1)(b_1-a_1)+(c_2-b_2)(b_2-a_2)\leq\sqrt{((c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2)((b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2)}.$$

Igualdad ocurre si y sólo si (c_2-b_2,b_2-a_2) y (c_1-b_1,b_1-a_1) son proporcionales, y en vista del lema 792, igualdad ocurre si y sólo si A, B y C son colineales.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
AC^2 &= (c_1-a_1)^2+(c_2-a_2)^2\\
&= (c_1-b_1+b_1-a_1)^2+(c_2-b_2+b_2-a_2)^2\\
&= (c_1-b_1)^2+2(c_1-b_1)(b_1-a_1)+(b_1-a_1)^2+(c_2-b_2)^2+2(c_2-b_2)(b_2-a_2)+(b_2-a_2)^2\\
&= (c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+2(c_1-b_1)(b_1-a_1)+2(c_2-b_2)(b_2-a_2)+(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\\
&\leq (c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+2\sqrt{((c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2)((b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2)}+(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\\
&= \left(\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}+\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}\right)^2\\
&= (AB+BC)^2,
\end{aligned}$$

demostrando el teorema. Véanse las figuras 7.148 y 7.149.

❑

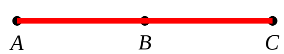


Figure 7.148: $AB+BC=AC$.

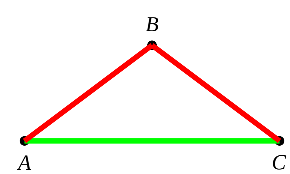


Figure 7.149: $AB+BC>AC$.

Tarea

794 Problema Osama la cucaracha comienza a viajar desde el punto $(-1,-1)$ y quiere llegar al punto $(2,1)$. En cada cuadrante y también, en los ejes, se mueve a razón de 1 de distancia por minuto, excepto en el segundo cuadrante, en donde se mueve a razón de media unidad de distancia por minuto. ¿Qué ruta deberá tomar Osama para minimizar el tiempo del recorrido? ¡La respuesta **no es** una recta de $(-1,-1)$ a $(2,1)$!

795 Problema (Desigualdad de Minkowski) Demuéstrese que si (a,b), (c,d) son puntos en el plano, entonces

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}.$$

Ocurre igualdad si y sólo si $ad=bc$.

796 Problema (Generalización de la desigualdad de Minkowski) Sea ninguno de los puntos del plano (a_k, b_k), $1 \leq k \leq n$ sobre los ejes. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2}.$$

Igualdad ocurre si y sólo si

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

797 Problema (AIME, 1991) Sea $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una colección de puntos con

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 17.$$

Considérese

$$S_n = \min_P \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2},$$

en donde el mínimo es tomado sobre todas las particiones P. Demuéstrese que exactamente una de entre $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ es un entero y hállese cual lo es.

798 Problema Al parámetro real arbitrario t, asóciese la recta L_t de ecuación

$$L_t : \quad (t-2)x + (t+3)y + 10t - 5 = 0.$$

En los casos siguientes , encuentre el valor de t y L_t que satisface las condiciones estipuladas.

❶ L_t pasa por $(-2, 3)$.

❷ L_t es paralela a al eje de x.

❸ L_t es paralela al eje de y.

❹ L_t es paralela a la recta de ecuación $x - 2y - 6 = 0$.

❺ L_t es normal (perpendicular) a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{4}x - 5$.

❻ ¿Existe acaso un punto (x_0, y_0) que pertenece a todas las L_t, para no importa qué valor de t?

7.10 Vectores

799 Definición Dados dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ en el plano, el vector $\overrightarrow{AB}$ asociado al segmento dirigido $[AB]$ es

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese también que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

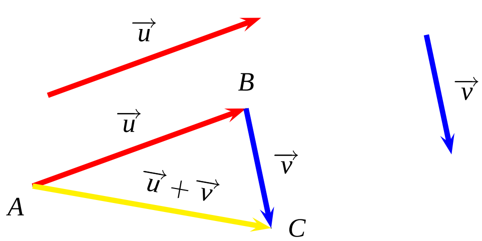


Figure 7.150: Suma de vectores.

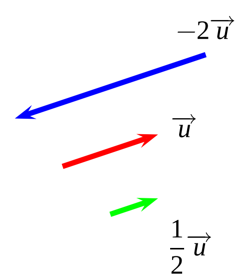


Figure 7.151: Multiplicación escalar de vectores.

800 Ejemplo Dos segmentos diferentes pueden asociarse al mismo vector. Por ejemplo, si $A = (1,2)$, $B = (3,4)$, $C = (0,1)$, $D = (2,3)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD}.$$

☞ *Se interpreta pues la noción de vector como un conjunto de "instrucciones": si el vector*

$$\overrightarrow{u} = \begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix},$$

la instrucción es "desplazarse a unidades en el eje de x, y b unidades en el eje de y." Esto es, un vector es un objeto que nos indica magnitud (norma), dirección (en las coordenadas del vector) y sentido (desde el punto inicial hasta el punto final).

801 Definición El vector cero es $\overrightarrow{0} = \begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \end{matrix}$.

802 Definición Se llamará *escalar* a todo número real $\lambda \in \mathbb{R}$.

803 Definición Dados vectores

$$\overrightarrow{u} = \begin{matrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{matrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{matrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{matrix},$$

y el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la *suma de vectores*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{matrix} u_1 + v_2 \\ \\ u_2 + v_2 \end{matrix},$$

y la *multiplicación de vectores por un escalar*

$$\lambda \overrightarrow{u} = \begin{matrix} \lambda u_1 \\ \\ \lambda u_2 \end{matrix}.$$

Nótese que geométricamente la suma y el producto de vectores se interpreta de manera siguiente. Para sumar $\overrightarrow{u}$ a $\overrightarrow{v}$ se busca un segmento arbitrario $[AB]$ tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. Luego se busca al (segmento único) $[BC]$ tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Finalmente, la suma se obtiene por la *regla del paralelogramo*

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Véase la figura 7.150. La multiplicación de vectores por un escalar tiene interpretación semejante. Véase la figura 7.151.

Lo arriba indicado pone en evidencia la Regla de Chasles.

804 Teorema (Regla de Chasles vectorial) Dados tres puntos arbitrarios A, B, C en el plano,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Se notarán aquí, para futura referencia, algunas propiedades del álgebra vectorial. La demostración es inmediata, al apelar a las coordenadas de los vectores.

805 Teorema (Álgebra de vectores) Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, vectores en el plano y sean α y β escalares. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- **Conmutatividad**
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{7.7}$$
- **Asociatividad**
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \tag{7.8}$$
-
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \tag{7.9}$$
-
$$\exists -\vec{a} \text{ tal que } \vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0} \tag{7.10}$$
- **Distributividad**
$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b} \tag{7.11}$$
- **Distributividad**
$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \tag{7.12}$$
-
$$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a}) \tag{7.13}$$

806 Definición La *norma o longitud del vector* $\overrightarrow{AB}$ es simplemente $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = AB$. Si $A \neq B$, la *dirección* del vector $\overrightarrow{AB}$ es la dirección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, esto es, el ángulo $\theta \in [0;\pi[$ que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ hace con el eje de x.

Obsérvese que si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces
$$||\lambda\vec{u}|| = |\lambda|\,||\vec{u}|| \tag{7.14}$$
y gracias a la desigualdad del triángulo, 793
$$||\vec{u}+\vec{u}|| \leq ||\vec{u}||+||\vec{v}||. \tag{7.15}$$

☞ *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces el vector $\dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ tiene norma 1 y la misma dirección del vector $\vec{u}$. El vector nulo $\vec{0}$ tiene norma 0 y no posee dirección.*[4]

807 Definición A un vector de norma 1 se le llama *vector unitario*.

808 Definición Sea $\vec{u} \neq \vec{0}$. Póngase $\mathbb{R}\vec{u} = \{\lambda\vec{u} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y sea $A \in \mathbb{R}^2$, $A = (a_1, a_2)$. La *recta afín con vector director* $\vec{u} = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$ *y pasando por* A es el conjunto de puntos en el plano
$$A+\mathbb{R}\vec{u} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a_1+tu_1, \quad y = a_2+tu_2, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $u_1 = 0$, la recta afín arriba definida es vertical, ya que x es constante. Si $u_1 \neq 0$, entonces
$$\frac{x-a_1}{u_1} = t \implies y = a_2 + \frac{(x-a_1)}{u_1}u_2,$$
esto es, la recta afín es una recta cartesiana con pendiente $\dfrac{u_2}{u_1}$. De manera semejante, si $y = mx+k$ es una recta cartesiana, entonces
$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ m \end{matrix} t + \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix},$$

[4] Y por eso canta: "No soy de aquí, ni soy de allá, no tengo edad, ni porvenir…"

esto es, toda recta cartesiana es también una recta afín, y se puede tomar al vector $\begin{matrix}1\\ m\end{matrix}$ como su vector director.

809 Definición Dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si las rectas $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ y $\mathbb{R}\overrightarrow{v}$ son paralelas. De aquí, dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralalos si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$. Se indicará que $\overrightarrow{u}$ es paralelo a $\overrightarrow{v}$ mediante la notación $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$.

☞ $\overrightarrow{0}$ *es paralelo a todo vector.*

810 Definición Dado un vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, se dice que el vector $\overrightarrow{v}$ tiene el *mismo sentido* que el vector $\overrightarrow{u}$ si existe algún escalar $\lambda > 0$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$. El vector $\overrightarrow{v}$ tiene *sentido opuesto* al vector $\overrightarrow{u}$ si existe algún escalar $\lambda' < 0$ tal que $\overrightarrow{u} = \lambda'\overrightarrow{v}$.

811 Definición Sean A y B puntos en el plano y $\overrightarrow{u}$ un vector unitario. Si $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{u}$, entonces λ es la *distancia dirigida o medida algebraica del segmento* $[AB]$ *con respecto al vector* $\overrightarrow{u}$. Se denotará esta por $\overline{AB}_{\overrightarrow{u}}$, o si el vector $\overrightarrow{u}$ se sobrentiende, por $\overline{AB}$. Obsérvese que $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

La medida algebraica será particularmente útil al considerar razones de longitudes de segmentos. Considérese tres puntos colineales A y B, $A \neq B$, fijos y X variando sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Supóngase, sin perdida de generalidad, que yacen sobre una recta horizontal, como en la figura 7.152, siendo positiva la dirección de $\overrightarrow{AB}$. Así pues, si X está estrictamente a la izquierda de A (y por consiguiente, a la izquierda de B), entonces $\overline{AX} < 0$, $\overline{XB} > 0$. Si X está estrictamente entre A y B, entonces $\overline{AX} > 0$, $\overline{XB} > 0$. Finalmente, si X está estrictamente a la derecha de B (y por consiguiente, a la izquierda de B), entonces $\overline{AX} > 0$, $\overline{XB} < 0$. Nótese que si $X = M$, el punto medio del segmento $[AB]$, entonces $\overline{AX} = \overline{XB}$. Si $X = A$, entonces $\overline{AX} = 0$ y X̣B $= AB$. Si $X = B$, entonces $\overline{AX} = AB$ y X̣B $= 0$. Cuando $X \to \pm\infty$, $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \to -1$. La gráfica de la función

$$X \mapsto \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$$

aparece en la figura 7.153.

Sea $X \in \overleftrightarrow{AB}$, $X \neq A$, $X \neq B$. Entonces

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overline{AX}} = \frac{\overrightarrow{XB}}{\overline{XB}}.$$

Los puntos A, B, C están alineados si y sólo si se cumple la *Relación de Chasles*:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{7.16}$$

La relación de Chasles muestra que

$$\overline{AA} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AB} - \overline{AB} = 0,$$

para cualquier punto A. Además

$$\overline{AX} = \overline{AP} \iff \overline{AX} + \overline{PA} = 0 \iff \overline{PX} = 0 \iff X = P. \tag{7.17}$$

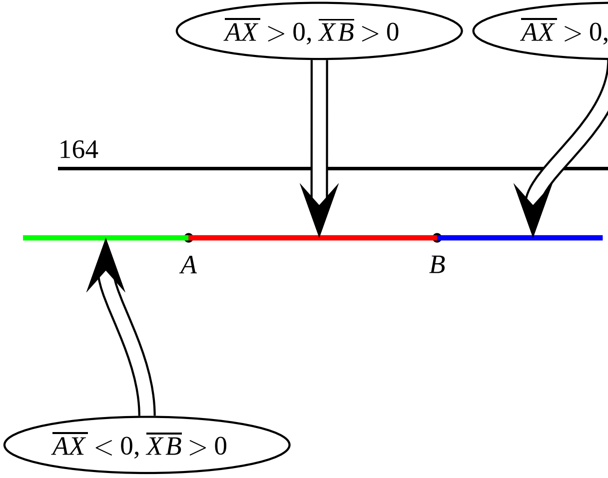


Figure 7.152: Distancias dirigidas.

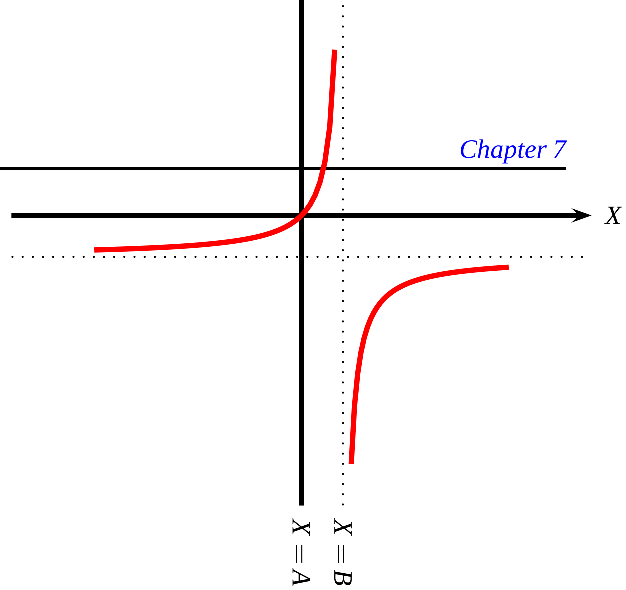


Figure 7.153: Razón $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$ (eje vertical) contra X (eje horizontal).

812 Teorema (Teorema de Euler) Sean A, B, C, D cuatro puntos alineados. Entonces

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0.$$

Demostración: *Utilizando la relación de Chasles,*

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{DB} - \overline{DA}, \qquad \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{DC} - \overline{DA}, \qquad \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{DC} - \overline{DB}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= (\overline{DB} - \overline{DA}) \cdot \overline{CD} + (\overline{DC} - \overline{DA}) \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot (\overline{DC} - \overline{DB}) \\ &= \overline{DB} \cdot \overline{CD} - \overline{DA} \cdot \overline{CD} + \overline{DC} \cdot \overline{BD} - \overline{DA} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{DC} - \overline{AD} \cdot \overline{DB} \\ &= \overline{DB} \cdot \overline{CD} - \overline{DA} \cdot \overline{CD} - \overline{DC} \cdot \overline{DB} - \overline{DA} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BD} \\ &= 0. \end{aligned}$$

❑

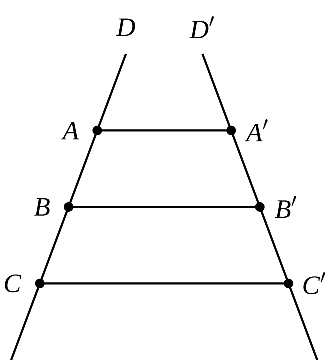


Figure 7.154: Teorema de Thales.

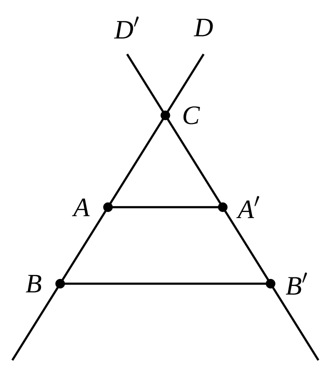


Figure 7.155: Corolario del teorema de Thales

813 Teorema (Teorema de Thales de Mileto) Sean D y D' dos rectas distintas. Sean A,B,C puntos distintos en D, A',B',C' puntos distintos en D', $A\neq A'$, $B\neq B'$, $C\neq C'$, $A\neq B$, $A'\neq B'$. Sea $\overleftrightarrow{AA'}\parallel\overleftrightarrow{BB'}$. Entonces

$$\overleftrightarrow{AA'}\parallel\overleftrightarrow{CC'}\iff\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}.$$

Demostración: *Refiérase a la figura 7.10. Por un lado, por ser vectores unitarios en la dirección de una misma recta,*

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overline{AB}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overline{AC}};\qquad\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overline{A'C'}}.$$

Por otro lado, por la Regla de Chasles,

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B'}=(\overrightarrow{A'B'}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AA'}.$$

Ya que $\overleftrightarrow{AA'}\parallel\overleftrightarrow{BB'}$, existe un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AA'}.$$

Ensamblando estos resultados,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CC'}&=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}\\&=-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\ \overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AA'}\\&=\left(\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)\overrightarrow{AB}+\left(1+\lambda\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\right)\overrightarrow{AA'}.\end{aligned}$$

Como $\overleftrightarrow{AA'}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, la igualdad anterior revela que

$$\overleftrightarrow{AA'}\parallel\overleftrightarrow{CC'}\iff\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}-\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}=0,$$

mostrando el teorema.[5]❑

Del teorema anterior, se obtiene de inmediato el siguiente corolario. (Véase la figura 7.10.)

814 Corolario Sean D y D' dos rectas distintas, intersecándose en el punto único C. Sean A,B, puntos en D, A',B', puntos en D'. Entonces

$$\overleftrightarrow{AA'}\parallel\overleftrightarrow{BB'}\iff\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}}.$$

5

"Si tres o más paralelas (Si tres o más parale-le-le-las)
Si tres o más paralelas (Si tres o más parale-le-le-las)
Son cortadas, son cortadas (por dos transversales, dos transversales)
Son cortadas, son cortadas (por dos transversales, dos transversales)
Si tres o más parale-le-le-las Si tres o más parale-le-le-las
Son cortadas, son cortadas Son cortadas, son cortadas...

Dos segmentos de una de estas,
dos segmentos cualesquiera
Dos segmentos de una de estas
son proporcionales
A los segmentos correspondientes de la oootraaa...."

Les Luthiers.

El cálculo vectorial hasta ahora desarrollado es particularmente útil al resolver problemas que demandan demostrar si tal recta es paralela a otra recta, etc. Se verán algunos ejemplos.

815 Ejemplo Dado un pentágono $ABCDE$, hállese $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}$.

►**Resolución:** *Utilizando la Regla de Chasles varias veces:*

$$\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA},$$

como se quería demostrar. ◄

816 Ejemplo Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el plano. Demuéstrese que el segmento de recta que une a los puntos medios de dos de los lados es paralelo al tercer lado y que mide la mitad de éste.

►**Resolución:** *Sean los puntos medios de* $[AB]$ *y* $[CA]$, M_C *y* M_B, *respectivamente. Se demostrará que* $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{M_CM_B}$. *Se tiene* $2\overrightarrow{AM_C}=\overrightarrow{AB}$ *y* $2\overrightarrow{AM_B}=\overrightarrow{AC}$. *Así*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ &= -2\overrightarrow{AM_C}+2\overrightarrow{AM_B}\\ &= 2\overrightarrow{M_CA}+2\overrightarrow{AM_B}\\ &= 2(\overrightarrow{M_CA}+\overrightarrow{AM_B})\\ &= 2\overrightarrow{M_CM_B},\end{aligned}$$

como se había de demostrar. ◄

817 Ejemplo En el $\triangle ABC$, sea M_C el punto medio de $[AB]$. Pruébese que

$$\overrightarrow{CM_C}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right).$$

►**Resolución:** *Como* $\overrightarrow{AM_C}=\overrightarrow{M_CB}$, *se tiene*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CM_C}+\overrightarrow{M_CA}+\overrightarrow{CM_C}+\overrightarrow{M_CB}\\ &= 2\overrightarrow{CM_C}-\overrightarrow{AM_C}+\overrightarrow{M_CB}\\ &= 2\overrightarrow{CM_C},\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado. ◄

818 Ejemplo Si las medianas $[AM_A]$ and $[BM_B]$ del triángulo no degenerado $\triangle ABC$ se intersecan en el punto G, demostrar que

$$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GM_A};\qquad \overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GM_B}.$$

►**Resolución:** *Como el triángulo no es degenerado, las rectas* $\overleftrightarrow{AM_A}$ *y* $\overleftrightarrow{BM_B}$ *no son paralelas y por tanto se encuentran en un punto, llamémosle* G. *Luego* $\overrightarrow{AG}$ *y* $\overrightarrow{GM_A}$ *son paralelos, y por lo tanto existe un escalar a tal que*

$\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{GM_A}$. *De igual manera, existe un escalar b tal que* $\overrightarrow{BG} = b\overrightarrow{GM_B}$. *Por el ejemplo 816 ,*

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{M_AM_B} &= \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} \\ &= b\overrightarrow{GM_B} - a\overrightarrow{GM_A} \\ &= b\overrightarrow{GM_A} + b\overrightarrow{M_AM_B} - a\overrightarrow{GM_A}, \end{aligned}$$

y así

$$(2-b)\overrightarrow{M_AM_B} = (b-a)\overrightarrow{GM_A}.$$

Al no ser $\triangle ABC$ *degenerado*[6], $\overrightarrow{M_AM_B}$ *y* $\overrightarrow{GM_A}$ *no son paralelos, de donde*

$$2-b=0, \quad b-a=0, \quad \implies a=b=2.$$

◀

819 Ejemplo En todo triángulo no degenerado $\triangle ABC$, las medianas concurren. El punto de concurrencia G se llama el *baricentro* o *centroide* del triángulo.

►**Resolución:** *Sea G como en el ejemplo 818. Se tiene que demostrar que* $\overleftrightarrow{CM_C}$ *también pasa por G. Encuéntrense las rectas* $\overleftrightarrow{CM_C}$ *y* $\overleftrightarrow{BM_C}$ *en* G'. *Por el ejemplo ya citado,*

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}; \qquad \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GM_B}; \quad \overrightarrow{BG'} = 2\overrightarrow{G'M_B}; \qquad \overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{G'M_C}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BG'} \\ &= -2\overrightarrow{GM_B} + 2\overrightarrow{G'M_B} \\ &= 2(\overrightarrow{M_BG} + \overrightarrow{G'M_B}) \\ &= 2\overrightarrow{G'G}. \end{aligned}$$

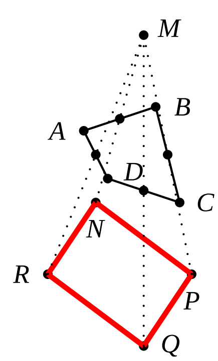
Resulta pues que

$$\overrightarrow{GG'} = -2\overrightarrow{GG'} \implies 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0} \implies G = G',$$

demostrando lo pedido. ◀

Tarea

820 Problema Dados en el plano son el cuadrilátero $ABCD$ y el punto M. Sean N', P', Q', R', respectivamente, los puntos medios de los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Constrúyase ahora puntos N, P, Q, R, que son las imágenes al ser M reflejado con respecto a los puntos N', P', Q', R'. Demostrar que $NPQR$ es un paralelogramo. (Véase la figura 7.156.)



[6] No suele frecuentar antros de vicio.

Figure 7.156: Problema 820.

821 Problema Dado un cuadrilátero $ABCD$. La recta trazada a través de A y paralela al lado $[BC]$ interseca la diagonal $[BD]$ en el punto M. De igual manera, La recta trazada a través de B y paralela al lado $[DA]$ interseca la diagonal $[AC]$ en el punto N. Demostrar que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

822 Problema Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos en el plano, no tres de ellos alineados. Se dirá que $ABCD$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

❶ $ABCD$ es un paralelogramo.

❷ $[AC]$ y $[BD]$ se bisecan.

❸ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

823 Problema En un cuadrilátero arbitrario no degenerado $ABCD$, M, N, P y Q son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ y $[AD]$. Sean E y F los puntos medios de las diagonales $[AC]$ y $[BD]$ respectivamente. Demostrar que $EQFP$ es un paralelogramo.

824 Problema Sean I, A, B, C puntos en el plano, y sean A', B', C' puntos simétricos a A, B, C' respectivamente, con respecto a I, esto es, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA'}$, etc. Demostrar que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AA'}.$$

Demostrar también que para un punto arbitrario del plano M se cumple

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = 6\overrightarrow{MI}.$$

825 Problema Sobre el lado $[AB]$ del $\triangle ABC$ resta el punto P, del cual se han trazado rectas paralelas a las medianas AM_A y BM_A, que intersecan a los lados del triángulo en los puntos A' (sobre $[BC]$) y B' (sobre $[CA]$). Sea E el punto medio de $A'B'$. Demostrar que P, E y el baricentro G del $\triangle ABC$ están alineados.

826 Problema Sean p, q enteros estrictamente positivos, y sea $n = p + q$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n puntos distintos (dos a dos). Demostrar que existe una recta L en el plano tal que exactamente p de los puntos yacen en un semiplano de ésta, y los otros q puntos en el otro semiplano, ninguno de los puntos yaciendo en L.

827 Problema Sea S el punto medio del segmento finito AB, y sea M cualquier punto que yace en la recta infinita que contiene al segmento AB. Demuéstrese que

$$MA^2 + MB^2 = 2SA^2 + 2SM^2.$$

828 Problema Dos rectas mutuamente perpendiculares intersecan los lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ y $[DA]$ del cuadrado $ABCD$ en E, F, K y L respectivamente. Demostrar que $EK = FL$. (Figura 7.157.)

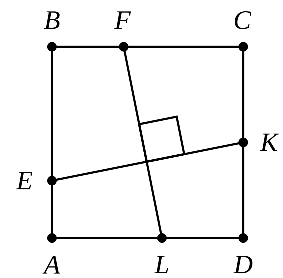


Figure 7.157: Problema 828.

7.11 Baricentros

829 Lema Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n puntos en el plano. Sean a_1, a_2, $\ldots a_n$ n números reales. A todo punto O del plano se le asocia la suma ponderada de vectores

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{OA_1} + a_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{OA_n}.$$

Entonces

1. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, $\overrightarrow{v}$ es independiente de O.
2. Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, el punto G tal que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{v}$ es independiente de O.

Demostración: *Para algún otro punto O' póngase*

$$\overrightarrow{v'} = a_1\overrightarrow{O'A_1} + a_2\overrightarrow{O'A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{O'A_n}.$$

Por la regla de Chasles, $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{O'A_k}$ y luego

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'} = a_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{O'A_1}) + a_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{O'A_2}) + \cdots + a_n(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{O'A_n}) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\overrightarrow{OO'}.$$

De aquí, si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$ y $\overrightarrow{v}$ no depende de O.

Si $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OO'}$, entonces sean G y G' puntos tales que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{v'}$. Luego

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OO'} - (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{0},$$

lo cual establece que G es independiente de O. ❑

830 Lema Sea (A_1,x_1), (A_2,x_2),..., (A_n,x_n), un sistema de puntos ponderados, con $A_k\in\mathbb{R}^2$, $x_k\in\mathbb{R}$. Si $x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0$ entonces existe un punto único G tal que

$$x_1\overrightarrow{GA_1}+x_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}.$$

Demostración: *Póngase*

$$a_1=\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n},\quad a_2=\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},\quad \ldots,\qquad a_n=\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Entonces

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=1,$$

y el resultado se deduce del lema 829. ❑

831 Definición El punto G definido por el lema 830 es llamado el *baricentro* de los puntos ponderados

$$(A_1,x_1),(A_2,x_2),\ldots,(A_n,x_n),$$

denotado por

$$G=\operatorname{bar}\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}.$$

Si $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$, entonces el baricentro de (A_1,x), (A_2,x), ..., (A_n,x) se conoce como *iso-baricentro*.

832 Lema El baricentro no cambia si se reemplazan sus coeficientes por coeficientes proporcionales, esto es, si $k\neq 0$ es una constante real,

$$\operatorname{bar}\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}=\operatorname{bar}\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_n\\ kx_1 & kx_2 & \cdots & kx_n\end{pmatrix}.$$

Demostración: *Por definición del baricentro de los puntos ponderados* (A_1,x_1), (A_2,x_2), ..., (A_n,x_n) *se tiene*

$$x_1\overrightarrow{GA_1}+x_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+x_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0},$$

y esto implica que

$$(kx_1)\overrightarrow{GA_1}+(kx_2)\overrightarrow{GA_2}+\cdots+(xa_n)\overrightarrow{GA_n}=k\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0},$$

de donde se destila el resultado. ❑

El baricentro coincide con la noción física de centro de gravedad, también llamado centro de masa. Esto es, si en el punto A_k se pone una masa de a_k unidades, el baricentro es el punto de equilibrio de todas estas masas.

833 Ejemplo Sean A y B dos puntos distintos del plano. El baricentro de $(A,1)$ y $(B,1)$ es el punto G del plano tal que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}.$$

Esto implica que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ y por lo tanto G es el punto medio del segmento $[AB]$.

834 Ejemplo Sean A y B dos puntos distintos del plano y $a+b \neq 0$. El baricentro de (A,a) y (B,b) es el punto G del plano tal que

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}.$$

Esto implica que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BG}=\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$. Obsérvese que G está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

El ejemplo anterior provee un algoritmo geométrico para localizar el baricentro de dos puntos (A,a) y (B,b): se divide al segmento $[AB]$ en $a+b$ partes iguales. El baricentro está a b unidades de A y a unidades de B. Véase la figura 7.158 para varios ejemplos. De igual manera, si el punto $X \neq B$ está sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, se observa que

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=k \iff \overline{XA}-k\overline{XB}=0 \iff \overrightarrow{XA}-k\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{0},$$

esto es, se puede interpretar a X como el baricentro de los puntos ponderados $(A,1)$ y $(B,-k)$. Se ve entonces que

$$[AB]=\{tA+(1-t)B : t\in[0\,;1]\}, \tag{7.18}$$

esto es, el segmento $[AB]$ no es otra cosa que una colección de baricentros de sus extremos, con coeficientes que suman a 1. Inclusive, se puede demostrar fácilmente que si $ab \geq 0$, entonces $aA+bB$ está entre los puntos A y B, yaciendo sobre $[AB]$.

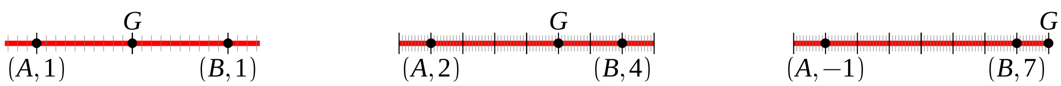


Figure 7.158: Varios baricentros.

Se puede percatar entonces que para dos puntos $A\in\mathbb{R}^2$, $B\in\mathbb{R}^2$ fijos, la colección de baricentros

$$\{G\in\mathbb{R}^2 : G=aA+bB, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, a+b\neq 0\}$$

no es otra cosa si no la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Si $A_k=(x_k,y_k)$ y $G=(g_1,g_2)$ es el baricentro de los puntos ponderados (A_1,a_1), (A_2,a_2), $\ldots$, (A_n,a_n) entonces

$$a_1\begin{pmatrix} x_1-g_1 \\ y_1-g_2\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix} x_2-g_1 \\ y_2-g_2\end{pmatrix}+\cdots+a_n\begin{pmatrix} x_n-g_1 \\ y_n-g_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \implies g_1=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}, \qquad g_2=\frac{a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

En general, como el baricentro no cambia si se reemplazan sus coeficientes por coeficientes proporcionales, no se puede decir que

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

son las “coordenadas baricéntricas,” ya que no son únicas. Una manera de obtener unicidad es imponiendo una condición extra, tal como en la siguiente definición.

835 Definición (Coordenadas baricéntricas) Si G es el baricentro de los puntos ponderados (A_1,a_1), (A_2,a_2), $\ldots$, (A_n,a_n) y

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,$$

entonces se dice que

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

son las coordenadas baricéntricas de G con respecto a $A_1,A_2,\ldots,A_n$ y se escribe

$$G=a_1A_1+a_2A_2+\cdots+a_nA_n.$$

836 Teorema (Asociatividad de baricentros) El baricentro de n puntos ponderados no cambia si se reemplaza una parte de ellos por su baricentro (si existiere) guardando los mismos coeficientes de los puntos restantes.

Demostración: *Sea G el baricentro de los puntos ponderados (A_1,a_1), (A_2,a_2), $\ldots$, (A_n,a_n). Si $a_1+a_2+\cdots+a_m \neq 0$, se puede definir el baricentro H de los puntos ponderados (A_1,a_1), (A_2,a_2), $\ldots$, (A_m,a_m). Luego*

$$a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+a_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}, \qquad a_1\overrightarrow{HA_1}+a_2\overrightarrow{HA_2}+\cdots+a_n\overrightarrow{HA_m}=\overrightarrow{0}.$$

Utilizando la regla de Chasles para $1 \leq k \leq m$, $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GA_k}-\overrightarrow{A_kH}$, de donde

$$a_1\overrightarrow{GA_1}+a_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+a_p\overrightarrow{GA_p}=(a_1+a_2+\cdots+a_m)\overrightarrow{GH},$$

de donde

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)\overrightarrow{GH}+a_{m+1}\overrightarrow{GA_{p+1}}+\cdots+a_n\overrightarrow{GA_n}=\overrightarrow{0}$$

y por lo tanto G es también el baricentro de los $n-m+1$ puntos ponderados $(H,a_1+a_2+\cdots+a_m)$, (A_{m+1},a_{m+1}), $\ldots$, (A_n,a_n).❑

837 Ejemplo Por el teorema anterior, el baricentro de tres puntos no alineados $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ se puede hallar de la siguiente manera: primero se halla el baricentro $(H,2)$ de $(B,1)$ y $(C,1)$, que no es otra cosa si no el punto medio del segmento $[BC]$. Luego se halla el baricentro de $(A,1)$ y $(H,2)$, que está a 2 unidades de A y 1 de H. Esto es, el baricentro de los tres puntos $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ es en efecto el baricentro del triángulo $\triangle ABC$. En otras palabras,

$$\mathrm{bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} A & H \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = G.$$

Véase la figura 7.159.

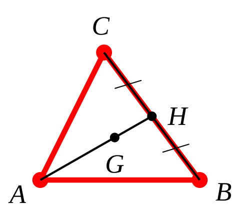


Figure 7.159: Baricentro de un triángulo.

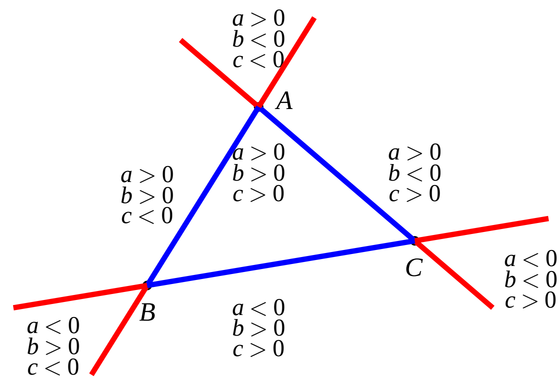


Figure 7.160: $aA+bB+cC$, $a+b+c=1$.

Si el triángulo $\triangle ABC$ no es degenerado y si $a+b+c\neq 0$, los baricentros $aA+bB+cC$ son puntos en el plano interiores, sobre, o exteriores al $\triangle ABC$. Véase la figura 7.160. Los signos son determinados de la manera siguiente: para saber el signo de a, considérese el punto A y la recta del triángulo opuesta a A. Esta recta divide al plano en dos semiplanos: uno conteniendo al punto A y el otro no. En el semiplano que contiene al punto A se observa que $a > 0$, en el semiplano que no contiene a A se observa que $a < 0$. Sobre la recta $a = 0$. De igual manera se determinan los signos de b y c.

La asociatividad de baricentros provee el siguiente criterio para alineación de puntos: dados tres puntos ponderados (A,a), (B,b), (C,c) con G como su baricentro. Si $b+c \neq 0$ y F es el baricentro de (B,b) y (C,c), entonces los puntos A, G, F están alineados.

Además, la asociatividad de baricentros provee el siguiente criterio para concurrencia de rectas: tengan tres puntos ponderados (A,a), (B,b), (C,c) baricentro G. Si $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ y si

- E es el baricentro de (A,a) y (B,b).
- F es el baricentro de (B,b) y (C,c).
- K es el baricentro de (A,a) y (B,b).

entonces las rectas $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{BK}$ son concurrentes en G.

Tarea

838 Problema Dado un triángulo no degenerado ABC:

❶ Construir el baricentro K de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,3)$.

❷ Construir el baricentro K de $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,-3)$.

❸ Demostrar que $\overleftrightarrow{AL} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

839 Problema $ABCD$ es un trapecio, con $[AB] \parallel [DC]$. Las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se cortan en E.

1. Si $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = x$, demostrar que E es el baricentro de $(A,1)$ y $(D,-x)$.
2. Demostrar que E es también el baricentro de $(B,1)$ y $(C,-x)$.
3. Demostrar que
$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} - x\overrightarrow{ED} - x\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}.$$
Deducir que E es el baricentro de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,-x)$ y $(D,-x)$.
4. Sea I el punto medio de $[AB]$ y J el punto medio de $[DC]$. Sea F la intersección de las diagonales $[AC]$ y $[DB]$. Demostrar que I, J, E, F están alineados.

840 Problema $\triangle ABC$ es rectángulo en A. Sea A' el pie de la perpendicular desde A hasta el lado $[BC]$. Póngase $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Demostrar que A' es el baricentro de (B,b^2) y (C,c^2).
2. Sea L el punto medio de $[AA']$. Demostrar que L es el baricentro de (A,a^2), (B,b^2) y (C,c^2).

841 Problema El $\triangle ABC$ tiene todos sus ángulos agudos. Sea M un punto del lado $[BC]$. Póngase $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Demostrar que M es el baricentro de $(B, [\triangle MAC])$ y $(C, [\triangle MAB])$.
2. Si M es el punto medio de $[BC]$, ¿a qué conclusión se llega?
3. Si AM es la bisectriz del $\widehat{BAC}$, ¿a qué conclusión se llega?
4. Deducir que el baricentro de (A,a), (B,b), (C,c) es el punto de concurrencia de las bisectrices del $\triangle ABC$.

842 Problema (Teorema de Menelao[7]) A un punto P que yaga sobre la recta determinada por un lado del $\triangle ABC$ se le llama *punto menelaico* de este lado. Si el punto no es un vértice del triángulo entonces es un punto menelaico *propio*.

Sean L, M, N puntos menelaicos de los lados $[BC]$, $[CA]$ y $[AB]$ del $\triangle ABC$. L, M, N son colineales si y solamente si

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1.$$

843 Problema En el $\triangle ABC$ sea L un punto en el lado $[BC]$. Demostrar que

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{AB \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{BAL}}}{CA \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{LAC}}}.$$

Aquí $\widehat{\mathbf{LAC}}$ denota la medida del *ángulo dirigido*, positiva si medido en sentido levógiro y negativa en sentido dextrógiro, con la propiedad $\widehat{\mathbf{LAC}} = -\mathbf{CAL}$.

844 Problema (Menelao trigonométrico) Sean L, M, N puntos menelaicos de los lados $[BC]$, $[CA]$ y $[AB]$ del $\triangle ABC$. L, M, N son colineales si y solamente si

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{BAL}}}{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{LAC}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \mathbf{CBM}}{\operatorname{sen} \mathbf{MBA}} \frac{\operatorname{sen} \mathbf{ACN}}{\operatorname{sen} \mathbf{NCB}} = -1.$$

845 Problema Demostrar que las rectas tangentes al circuncentro de un triángulo en sus vértices se cortan en tres puntos alineados.

846 Problema (Teorema de Desargues) Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se dicen *copolares* si las tres rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son concurrentes. Los triángulos son *coaxiales* si los tres puntos L (intersección de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$), M (intersección de $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{C'A'}$), N (intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$) son colineales. Demostrar que dos triángulos en el plano son copolares si y sólo si son coaxiales.

847 Problema (Teorema de Ceva, 1678) Una recta que pasa por el vértice de un triángulo se llama *ceviana* de este vértice. La ceviana es *propia* si no coincide con un lado del triángulo. Las tres cevianas $[AA']$, $[BB']$ y $[CC']$ de un $\triangle ABC$ concurren si y sólo si

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = +1.$$

7.12 Transformaciones geométricas

848 Definición Una *traslación por un vector* $\overrightarrow{u}$ es una función

$$T_{\overrightarrow{u}}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

tal que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. El punto M' se llama *punto homólogo* del punto M con respecto a la traslación $T_{\overrightarrow{u}}$.

Se observa que $T_{\overrightarrow{0}}$ es una función que no mueve ningún punto, esto es, la identidad. Además se observa la ley de composición conmutativa $T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{v}} \circ T_{\overrightarrow{u}}$ y la ley de inversos $T_{-\overrightarrow{u}} = T^{-1}_{\overrightarrow{u}}$.

Es fácil de verificar que la traslación satisface las siguientes propiedades:

1. La traslación envía a un segmento $[AB]$ a otro $[A'B']$, igual en longitud y paralelo a éste, siendo A' homólogo a A y B' homólogo a B.
2. La traslación transforma a una recta a otra paralela a la original.
3. La traslación transforma un triángulo $\triangle ABC$ en otro igual $\triangle A'B'C'$ siendo A', B', C' homólogos, respectivamente, a A, B, C.
4. La traslación transforma a un ángulo en otro ángulo, siendo los vértices puntos homólogos y los lados de correspondientes de los ángulos, paralelos.
5. La traslación transforma a un círculo en otro igual, preservando los radios y siendo los centros de los círculos puntos homólogos.

849 Ejemplo Dadas las longitudes AB, BC, CD y DA, construir un trapecio $ABCD$, de bases AB y DC.

►**Resolución:** *Véase la figura 7.161. Supuesto resuelto el problema, considérese la traslación $T_{\overrightarrow{DC}}$, con $T_{\overrightarrow{DC}}(D) = C$, $T_{\overrightarrow{DC}}(A) = M$. Obsérvese que $CM = DA$, es longitud conocida. Así pues, una posible construcción es la siguiente: conocidas las longitudes de los lados $[CM]$, $[MB]$ y $[BC]$ del $\triangle MBC$, se construye este triángulo. Para obtener los vértices A y D, se trasladan los puntos homólogos M y C por un vector de longitud* $\min\left(\left\|\overrightarrow{DC}\right\|, \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\right)$ *y con dirección y sentido del vector $\overrightarrow{BM}$.* ◄

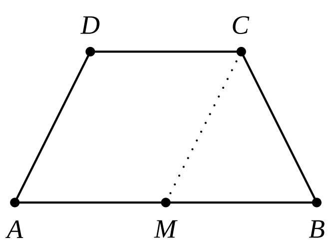


Figure 7.161: Ejemplo 849.

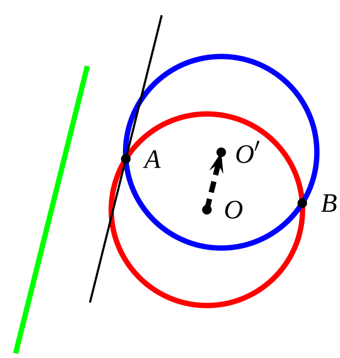


Figure 7.162: Ejemplo 850.

850 Ejemplo Sea Γ un círculo dado y D una recta dada. Construir una cuerda de Γ paralela a D de longitud l dada.

►**Resolución:** *Véase la figura 7.162. Sea $\overrightarrow{u}$ un vector director de D, de longitud l. Considérese la imagen Γ' de Γ mediante la traslación $T_{\overrightarrow{u}}$. Sean A y B las intersecciones de Γ y Γ'. La recta Δ paralela a D y pasando por A cumple las condiciones del problema. En efecto, si $T_{\overrightarrow{u}}(A) = C$, entonces $AC = l$ y $||AC|| = l$, como requerido. Si R es el radio del círculo, nótese que hay dos soluciones si $l < 2R$, una solución si $l = 2R$ y ninguna si $l > 2R$.* ◄

851 Definición Una *rotación (o giro) de centro O y ángulo de giro α* es una función

$$G_{O,\alpha} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ y $\widehat{MOM'} = \alpha$. El punto M' se llama *punto homólogo* del punto M con respecto a la rotación $G_{O,\alpha}$.

Se observa que $G_{O,0}$ es una función que no mueve ningún punto, esto es, la identidad. Además se observa la ley de composición conmutativa $G_{O,\alpha} \circ G_{O,\alpha'} = G_{O,\alpha+\alpha'} = G_{O,\alpha'+\alpha} = G_{O,\alpha'} \circ G_{O,\alpha}$ y la ley de inversos $G_{O,-\alpha} = G^{-1}_{O,\alpha}$.

Es fácil de verificar que la rotación satisface las siguientes propiedades:

1. La rotación envía a un segmento $[AB]$ a otro $\left[A'B'\right]$, igual en longitud y paralelo a éste, siendo A' homólogo a A, B' homólogo a B y $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \alpha$.
2. La rotación transforma a una recta en otra, siendo el ángulo entre ellas α.
3. La rotación transforma un triángulo $\triangle ABC$ en otro igual $\triangle A'B'C'$ siendo A', B', C' homólogos, respectivamente, a A, B, C.
4. La rotación transforma a un ángulo en otro igual e igualmente orientado.
5. La rotación transforma a un círculo en otro igual, siendo los centros de los círculos puntos homólogos.

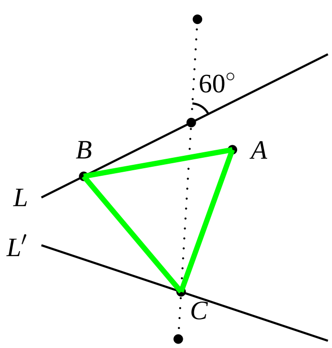


Figure 7.163: Ejemplo 852.

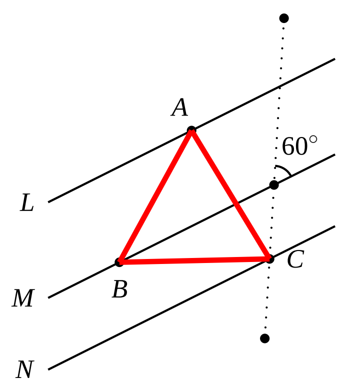


Figure 7.164: Ejemplo 853.

852 Ejemplo Dado un punto A y dos rectas L y L', hallar un triángulo $\triangle ABC$, equilátero, que tenga el vértice B sobre L y el vértice C sobre L'.

►**Resolución:** *Supuesto el problema resuelto, considérese la rotación $G_{A,60^\circ}$. Se tendrá $G_{A,60^\circ}(B) = C$. ¿Cómo encontrar C? Sea C la intersección de la recta L' y $G_{A,60^\circ}(L)$. Póngase ahora $G_{A,'60^\circ}(C) = B$. Es fácil percatarse que C y B cumplen las condiciones requeridas.* ◄

853 Ejemplo Considérese rectas paralelas L, M, N. Constrúyase un triángulo equilátero $\triangle ABC$ tal que A yaga sobre L, B yaga sobre M y C yaga sobre N.

►**Resolución:** *Véase la figura 7.164. Fíjese un punto A arbitrario de L. Considérese la recta $G_{A,60^\circ}(M)$. Sea C la intersección de N y $G_{A,60^\circ}(M)$. Póngase ahora $G_{A,60^\circ}(C) = B$.* ◄

854 Ejemplo Se construye, exteriormente, cuadrados en los lados AB y BC del triángulo $\triangle ABC$, siendo P y Q los centros de los respectivos cuadrados, como en la figura 7.165. Sea M el punto medio del lado AB. Demuéstrese que $PM = QM$ y que $PM \perp QM$.

►**Resolución:** *Sean U y V las esquinas de los cuadrados opuestas a A y B, respectivamente. Nótese que una rotación de* 90° *en torno a C toma al $\triangle ACV$ al $\triangle UCB$. Luego PV y UB son iguales y perpendiculares. En $\triangle PUB$ vemos que we see PM es la mitad de larga y paralela a UB. De igual manera, MQ es la mitad de larga y paralela a PV. Por lo tanto, PM y MQ son iguales y perpendiculares.* ◄

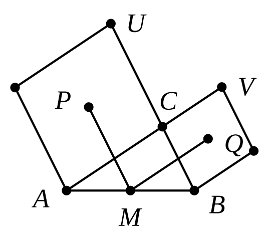


Figure 7.165: Ejemplo 854.

855 Definición Una *reflexión con respecto al punto O o simetría central de centro O* es una función

$$R_O : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

tal que O es el punto medio de $\overline{MM'}$. El punto M' se llama *punto homólogo* del punto M con respecto a la simetría central R_O.

☞ *Una simetría central no es otra cosa que el giro $G_{O,180^\circ}$ y por lo tanto tiene las mismas propiedades de éste.*

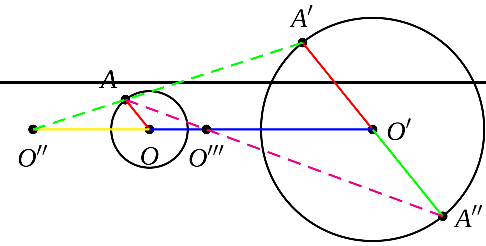


Figure 7.166: Ejemplo 861.

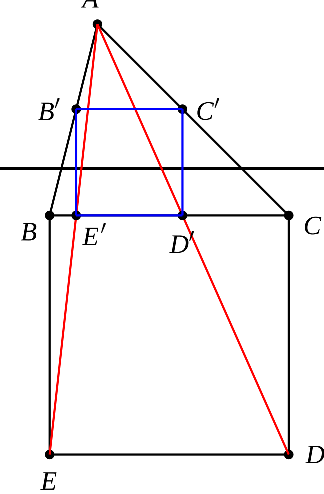


Figure 7.167: Ejemplo 862.

856 Ejemplo Por un punto X, situado en el interior de un ángulo, trácese una recta cortando a los lados del ángulo en dos puntos equidistantes de X.

> ►**Resolución:** *Constrúyase la recta ℓ', simétrica con respecto a X de la recta ℓ (uno de los lados del ángulo). Para hacer esto, elíjanse dos puntos cualesquiera de ℓ y constrúyanse sus simétricos con respecto a X, luego trácese la recta que los une. Sea S la intersección de ℓ' con el otro lado del ángulo. Nótese que X está a igual distancia de ℓ y ℓ'. Constrúyase ahora S', homólogo a S con respecto a una simetría central de centro X. Obsérvese que S' está sobre ℓ. Esto resuelve el problema.* ◄

Dado un polígono de n lados, está claro que se puede construir otro polígono cuyos vértices son los puntos medios $M_1, \ldots, M_n$ de los lados. El siguiente ejemplo considera el problema recíproco.

857 Ejemplo Dados los puntos $M_1, \ldots, M_n$, ¿existe acaso un polígono cuyos puntos medios de los lados son los M_k?

> ►**Resolución:** *Sea R_{M_k} una reflexión de centro M_k. Póngase $R_{M_k}(A_k) = A_{k+1}$, con $A_{n+1} = A_1$. Una vez A_1 es elegido, los otros A_k quedan determinados. Se verá ahora como elegir a A_1.*
>
> *Obsérvese que A_1 es un punto fijo de la composición de reflexiones centrales $R = R_{M_n} \circ \ldots R_{M_2} \circ R_{M_1}$. Nótese además que ya que una reflexión central es un giro con ángulo de rotación π, un número par de composiciones es efectivamente una traslación, mientras que un número impar es una reflexión central.*
>
> *Así pues, si la composición es impar, va existir un punto fijo, llamémosle A. Se pondrá entonces $A_1 = A$. Si la composición es par, tal punto fijo no existe necesariamente y el problema no tiene solución.*◄

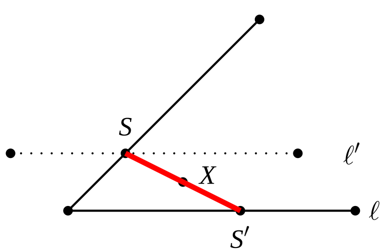


Figure 7.168: Ejemplo 856

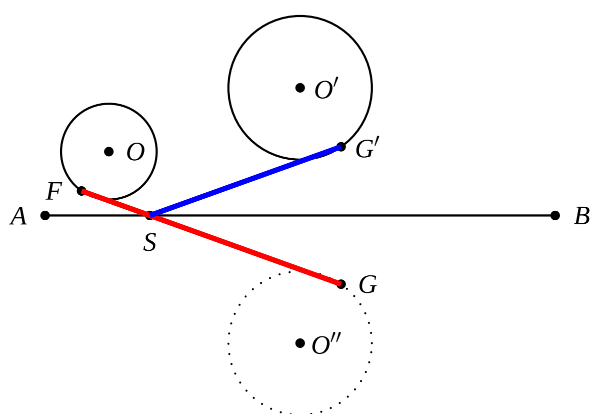


Figure 7.169: Ejemplo 859

858 Definición Una *simetría axial con eje ℓ, o reflexión con respecto a la recta ℓ* es una función

$$S_\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

tal que ℓ es la mediatriz de $[MM']$. El punto M' se llama *punto homólogo* del punto M con respecto a la simetría axial S_ℓ.

Se observa que $S_\ell \circ S_\ell$ es la identidad. Es fácil de verificar que la simetría axial satisface las siguientes propiedades:

1. La simetría axial envía a un segmento $[AB]$ a otro $[A'B']$, igual en longitud, siendo A' homólogo a A, B' homólogo a B.
2. La simetría axial transforma a una recta en otra.
3. La simetría axial transforma un triángulo $\triangle ABC$ en otro igual $\triangle A'B'C'$ siendo A', B', C' homólogos, respectivamente, a A, B, C, pero cambia el sentido de orientación de los vértices.
4. La simetría axial transforma a un ángulo en otro igual pero contrariamente orientado.
5. La simetría axial transforma a un círculo en otro igual, siendo los centros de los círculos puntos homólogos.

859 Ejemplo Dadas dos circunferencias de centro O, O' y una recta L, hallar sobre L un punto del cual las tangentes trazadas hasta las circunferencias desde este punto formen ángulos idénticos con L.

> ►**Resolución:** *Véase la figura 7.169. Se refleja el centro O' a través de la recta L y se construye un círculo homólogo con centro O''. Se construyen ahora tangentes a los círculos O y O''. Por ser opuestos al vértice $\widehat{BSG} = \widehat{FSA}$. Por ser reflexión axial, $\widehat{G'SB} = \widehat{BSG}$, de donde se deduce que S es el punto buscado. Hay cuatro soluciones, ya que hay cuatro tangentes. En la solución se consideró el caso cuando ambos círculos yacían en el mismo lado de la recta. Está claro que la solución se simplifica si ambos círculos yacen en lados opuestos de la recta.* ◄

860 Definición Llámase *homotecia de centro O y constante de similitud λ* a una función

$$H_{O,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ M & \mapsto & M' \end{array},$$

tal que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OM'}$. Si $\lambda > 0$ la homotecia se dice *directa* y si $\lambda < 0$, *inversa*.

Es fácil de ver que $H_{O,1}$ es la identidad y que $H_{O,-1}$ es una reflexión de centro O. Se observan además las siguientes propiedades:

1. Una recta es homotética a otra recta.
2. Un triángulo es homotético a otro triángulo semejante al primero.
3. Un ángulo es homotético a otro ángulo igual al primero.
4. Un círculo es homotético a otro círculo concéntrico.

861 Ejemplo Dados dos círculos de centros O y O', hallar los centros y las constantes de similitud de las homotecias que transforman el uno al otro.

►**Resolución:** *Trácese la recta pasando por los centros O y O'. Trácense ahora dos radios OA y $O'A'$ paralelos y en el mismo sentido, en uno y otro círculo. Sea O'' la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{OO'}$. Es fácil ver ahora que $H_{O'',\frac{R'}{R}}$ es una homotecia directa que transforma al círculo de centro O y radio R en el círculo de centro O' y radio R'.*

Para obtener la homotecia inversa $H_{O''',-\frac{R'}{R}}$, simplemente trácense dos radios OA y $O'A''$ paralelos y en distinto sentido y sígase el procedimiento anterior. Véase la figura 861. ◄

862 Ejemplo En el $\triangle ABC$ construir, mediante regla y compás, un cuadrado tal que uno de sus vértices pertenezca al lado $[AB]$, otro al lado $[AC]$ y los otros dos al lado $[BC]$.

►**Resolución:** *Constrúyase primero el cuadrado $BCDE$ exterior al lado $[BC]$ del triángulo. Sean D' y E' las intersecciones de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{AE}$ con el lado $[BC]$. Sea $H_{A,\lambda}$ la homotecia de centro A tal que $H_{A,\lambda}(D) = D'$ y $H_{A,\lambda}(E) = E'$. Sea $B'C'D'E'$ la imagen del cuadrado $BCDE$ bajo esta homotecia. Por construcción, $B'C'D'E'$ cuadrado es. Ahora bien, los puntos A,B,B' están alineados, al igual que los puntos A,C,C', de donde $B'C'D'E$ es el cuadrado deseado. Véase la figura 7.167* ◄

Tarea

863 Problema Dado un punto A, una recta L y un círculo Γ, constrúyase un triángulo $\triangle ABC$ tal que B yaga sobre L y C yaga sobre Γ.

864 Problema Encontráis un antiguo mapa de tesoro en el baúl del tatarabuelo. El diagrama indica que partiendo del muelle debéis caminar hasta el roble, doblar a la derecha 90° y caminar igual distancia, clavando una estaca aquí, marcada con una X. Luego regresáis al muelle, camináis hasta el pino, dobláis a la izquierda 90°, camináis igual distancia, y claváis una estaca marcada con una Y. El tesoro se halla en el punto medio del segmento $[XY]$. Como encontráis fáciles las instrucciones, alquiláis un barco y viajáis hasta los mares del sur. Al llegar a la costa de tan pequeña isla, sóis capaz de encontrar el roble y el pino, pero, ¡ay caramba!, del muelle no hay rastro porque se lo ha comido el salitre. ¿Cómo encontraréis el tesoro?

865 Problema Sea $\triangle ABC$ isósceles en A. Sean M y N puntos sobre los lados $[AB]$ y $[AC]$, respectivamente. Las rectas Les $\overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ se cortan en P. Demostrar que

$$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC} \iff APM = \widehat{APN}.$$

866 Problema Considérese el $\triangle A_1A_2A_3$ y sea P_0 un punto en el plano. Defínase $A_s = A_{s-3}$ para $s \geq 4$. Ahora se construye la sucesión de puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ de tal manera que $G_{A_{k+1},120^\circ}(P_{k-1}) = P_k$. Demuéstrese que si $P_{2004} = P_0$, entonces $\triangle A_1A_2A_3$ es equilátero.

867 Problema Dados son tres círculos disjuntos dos a dos. Trácense los tres puntos de intersección de las tres tangentes exteriores comunes. Demuéstrese que esto puntos están alineados.

7.13 Teoremas de Ceva y de Menelao

868 Teorema (Teorema de Ceva, 1678) Las tres cevianas AA', BB' y CC' de un $\triangle ABC$ concurren si y sólo si

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = +1.$$

Demostración: $\Longrightarrow$ *Usando el teorema 700 se obtiene*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{[\triangle APC]}{[\triangle PCB]} \cdot \frac{[\triangle APB]}{[\triangle APC]} \cdot \frac{[\triangle PCB]}{[\triangle ABP]} = 1.$$

$\Leftarrow$ *Presúmase que AA' y BB' se intersecan en P. Únase CP y extiéndase hasta AB, intersecándola en C''. Como AA', BB' y CC'' son concurrentes, por la mitad del teorema ya demostrada se tiene*

$$\frac{AC''}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = +1.$$

Pero por hipótesis

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=+1.$$

Esto significa que

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC''}{C''B},$$

de donde se colige que $C'=C''$. ❑

☞ *Como el teorema 700 no depende de la posición de los puntos involucrados, la demostración anterior es válida aun cuando el punto* P *yace fuera del triángulo* $\triangle ABC$.

869 Teorema (Forma Trigonométrica del Teorema de Ceva) Sea P un punto arbitrario en el plano y en el $\triangle ABC$ sea A' el punto de intersección de las rectas AP y BC, B' el punto de intersección de las rectas BP y CA, y C' el punto de intersección de las rectas CP y AB. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{ACC'}}{\operatorname{sen}\widehat{C'CB}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{BAA'}}{\operatorname{sen}\widehat{A'AC}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{CBB'}}{\operatorname{sen}\widehat{B'BA}}=1.$$

De manera recíproca, si A',B',C' son puntos en los lados BC,CA,AB respectivamente, y si

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{ACC'}}{\operatorname{sen}\widehat{C'CB}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{BAA'}}{\operatorname{sen}\widehat{A'AC}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{CBB'}}{\operatorname{sen}\widehat{B'BA}}=1$$

entonces AA',BB',CC' son concurrentes.

Demostración: *Se quiere demostrar que*

$$\frac{\operatorname{sen}\widehat{ACC'}}{\operatorname{sen}\widehat{C'CB}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{BAA'}}{\operatorname{sen}\widehat{A'AC}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\widehat{CBB'}}{\operatorname{sen}\widehat{B'BA}}=1$$

sí y sólo si

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

Ahora bien,

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{CA\operatorname{sen}\widehat{ACC'}}{BC\operatorname{sen}\widehat{C'CB}},$$
$$\frac{BX}{XC}=\frac{AB\operatorname{sen}\widehat{BAA'}}{CA\operatorname{sen}\widehat{A'AC}},$$
$$\frac{CY}{YA}=\frac{BC\operatorname{sen}\widehat{CBB'}}{AB\operatorname{sen}\widehat{B'BA}}.$$

Multiplicando y cancelando en estas tres igualdades se obtiene el resultado. ❑

870 Teorema (Teorema de Menelao) Sean L,M,N puntos menelaicos de los lados BC, CA y AB del $\triangle ABC$. L,M,N son colineales si y solamente si

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}\cdot\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=-1.$$

Demostración: $\Longrightarrow$ *Sean* X,Y *puntos arbitrarios de la recta* LMN. *Entonces*

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{[\triangle BXY]}{[\triangle CXY]}\cdot\frac{[\triangle CXY]}{[\triangle AXY]}\cdot\frac{[\triangle AXY]}{[\triangle BXY]}=1.$$

$\Leftarrow$ Presúmase ahora que la recta MN corta a AC en L'. Por la mitad del teorema ya demostrada se tiene

$$\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$

Pero por hipótesis

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=-1.$$

Así

$$\frac{BL'}{L'C}=\frac{BL}{LC},$$

de donde $L=L'$. ❑

871 Ejemplo (IMO 1982) Las diagonales AC y CE de un hexágono regular $ABCDEF$ son dividas interiormente en los puntos M y N, respectivamente, de tal manera que

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r.$$

Determínese r si B,M,N son colineales.

►**Resolución:** *Únase BE intersecando AC en P. Aplícando el teorema de Menelao al $\triangle CPE$ y a la recta BMN, se tiene*

$$\frac{CM}{MP}=\frac{1-r}{r-\frac{1}{2}};\qquad PB=AB\cos\widehat{ABP}=\frac{AB}{2}=\frac{BE}{4}\implies\frac{PB}{BE}=\frac{1}{4}.$$

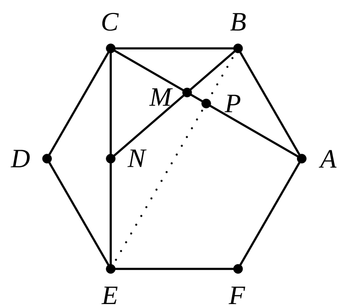
Además

$$\frac{EN}{NC}=\frac{1-r}{r},$$

de donde se colige que

$$\frac{2-2r}{2r-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1-r}{r}=1\implies r=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

◄



872 Teorema [Invariancia bajo perspectiva] Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas sobre el plano. Si A, B, C, D son puntos distintos sobre L_1 y si A', B', C', D' son puntos distintos sobre L_2 y si las rectas AA', BB', CC', DD' son concurrentes, entonces

$$\frac{AC\cdot BD}{CB\cdot DA}=\frac{A'C'\cdot B'D'}{C'B'\cdot D'A'}.$$

Demostración: *Si AA', BB', CC', DD' se intersecan en O y si P es el punto de intersección de L_1 y L_2 (si $L_1||L_2$, entonces P es el punto en infinito). Vêase la figure 7.170.*

Aplicando el teorema de Menelao a $\triangle ABA'$, $\triangle A'PA$, $\triangle B'PB$, $\triangle BPB'$ intersecándose con las rectas CC', DD', CC', y DD' respectivamente,

$$\frac{AC}{CP}\cdot\frac{PC'}{C'A'}\cdot\frac{A'O}{OA}=1,$$

$$\frac{A'D'}{D'P} \cdot \frac{PD}{DA} \cdot \frac{AO}{OA'} = 1,$$

$$\frac{BD}{DP} \cdot \frac{PD'}{D'B'} \cdot \frac{B'O}{OB} = 1.$$

En multiplicando estas cuatro igualdades se colige

$$\frac{AC \cdot A'D' \cdot B'C' \cdot BD}{C'A' \cdot DA \cdot CB \cdot D'B'} = 1,$$

de donde

$$\frac{AC \cdot BD}{CB \cdot DA} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{C'B' \cdot D'A'}.$$

❑

873 Teorema [Teorema de Simson] Sea P un punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$. Sean D, E, F los pies de las perpendiculares de P a BC, CA y AB respectivamente. Entonces C, E, F son colineales.

Demostración: *Para demostrar que D, E, F son colineales, se necesita demostrar que*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

Nótese que $AF = PA\cos\widehat{PAF}$, $FB = PB\cos\widehat{PBF}$, $BD = PB\cos\widehat{PBD}$, $DC = PC\cos\widehat{PCD}$, $CE = PC\cos\widehat{PCE}$, $EA = PA\cos\widehat{PAE}$. *Por lo tanto,*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{(\cos\widehat{PAC})(\cos\widehat{PBD})(\cos\widehat{PCE})}{(\cos\widehat{PBF})(\cos\widehat{PCD})(\cos\widehat{PAE})}.$$

Ahora bien, $\widehat{PAF} = \widehat{PCD}, \widehat{PBD} = \widehat{PAE}, \widehat{PCE} = \widehat{PBF}$, *de donde se consigue el resultado.* ❑

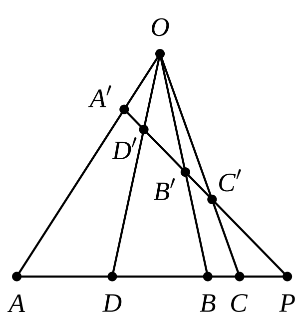


Figure 7.170: Teorema 872.

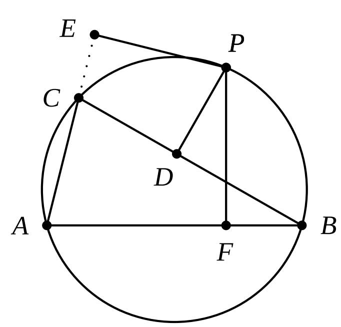


Figure 7.171: Teorema 873.

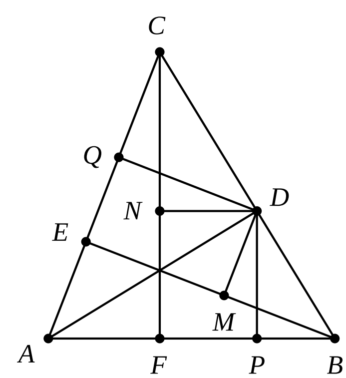


Figure 7.172: Ejemplo 874.

874 Ejemplo Refiérase a la figura 7.172. D, E, F son, respectivamente, los pies de las perpendiculares de A a BC, B a CA y de C a AB. Trácense las rectas perpendiculares de D a AB, CA, BE, CF y sean P, Q, M, N los respectivos pies de las perpendiculares. Demuéstrese que P, Q, M, N son colineales.

Demostración: *El cuadrilátero $BDHF$ es cíclico y la recta de Simson de D pasa por P, M, N. En otras palabras P, M, N son colineales. Arguyendo de manera semejante se demuestra que Q, M, N son colineales.* ❑

875 Ejemplo Sea H el ortocentro, O el circuncentro y R el circunradio del $\triangle ABC$. Sea D la reflexión de A a través de la recta BC, E la reflexión de B a través de CA y F aquella de C a través de AB. Demuéstrese que D, E y F son colineales si y sólo si $OH = 2R$. (Figura 7.173.)

Demostración: *Sea $\triangle PQR$ el triángulo cuyo triángulo de medianas es $\triangle ABC$ (esto es A es el punto medio de QR, B el de RP y C el de PQ). Desde O, trácense rectas perpendiculares a QR, RP y PQ, cuyos pies de las perpendiculares son D', E', F' respectivamente. Por el teorema de Simson, D', E', F' son colineales si y sólo si O yace en el circuncírculo del $\triangle PQR$. Nótese que el circuncentro del $\triangle PQR$ es el ortocentro del $\triangle ABC$, esto es, H. Así, O yace en el circuncírculo del $\triangle PQR$ si y sólo si OH es igual al $\triangle PQR$ que es $2R$. Véase la figure 7.174* ❑

876 Teorema (Teorema de Ptolomeo) Dados cuatro puntos cualesquiera en posición general (esto es, ninguno de ellos coincide, y no tres de ellos son colineales),

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD.$$

La igualdad se cumple si y sólo si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Demostración: *Sean L, M, N, respectivamente, los pies de las perpendiculares de D a BC, CA, AB. Como $\widehat{CLD} = \widehat{CMD} = 90^\circ$, los puntos L, C, D, M son cocíclicos. La figura 7.175 muestra uno de los casos posibles. De todas maneras se tiene*

$$LM = CD \operatorname{sen} \widehat{BCA} = \frac{CD \cdot AB}{2R},$$

en donde R denota el circunradio del $\triangle ABC$. De la misma guisa,

$$MN = \frac{AD \cdot BC}{2R}, \qquad LN = \frac{BD \cdot AC}{2R}.$$

En virtud de la desigualdad del triángulo, $LM + MN \geq LN$. Utilizando las expresiones para LM, MN y LN se obtiene

$$\frac{CD \cdot AB}{2R} + \frac{AD \cdot BC}{2R} \geq \frac{BD \cdot AC}{2R}.$$

Esto demuestra la desigualdad deseada. La igualdad es satisfecha si y solamente si L, M, N son colineales y gracias al teorema de Simson esto sucede si y solamente si D yace en el circuncírculo del $\triangle ABC$.❑

877 Ejemplo Sea P un punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$ yaciendo en el arco $\widehat{BC}$. Demuéstrese que $PA = PB + PC$.

►**Resolución:** *El resultado se consigue de inmediato al aplicar el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico $ABPC$ (figura 7.176).* ◄

878 Ejemplo Si un círculo pasando por A corta dos lados y una diagonal del paralelogramo $ABCD$ en los puntos P, Q, R tal como en la figura , demuéstrese que

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

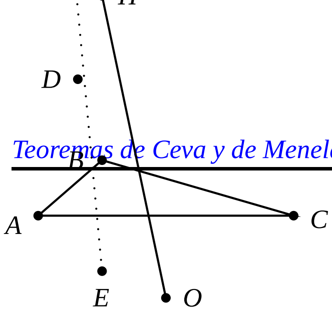


Figure 7.173: Ejemplo 875.

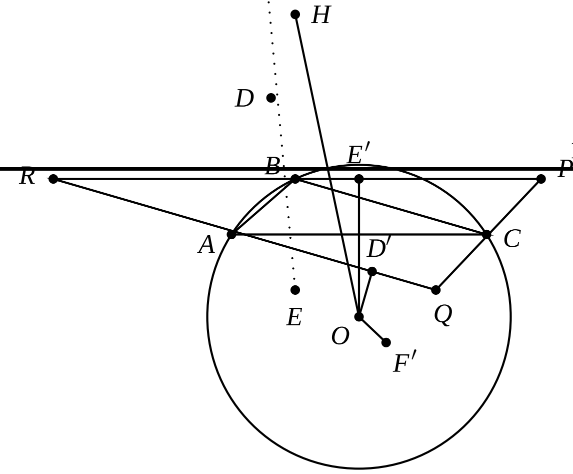


Figure 7.174: Ejemplo 875.

►**Resolución:** *Aplíquese el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico APQR obteniendo*

$$AP \cdot RQ + AR \cdot PQ = AQ \cdot RP.$$

Véase la figura 7.177. Obsérvese que $\triangle ABC \sim \triangle RQP$. *Al multiplicar esta última igualdad por la constante* $\dfrac{AB}{RQ}$ *se obtiene*

$$AP \cdot AB + AR \cdot CB = AQ \cdot AC.$$

Reemplazando CB *por* AD, *se colige el resultado*

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

◄

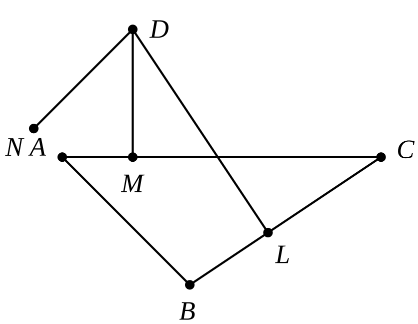


Figure 7.175: Teorema 876.

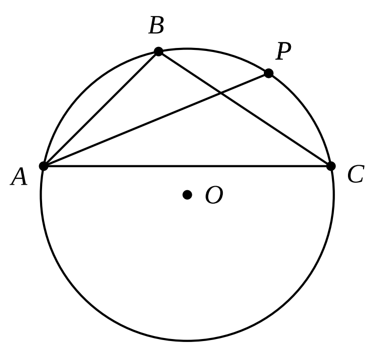


Figure 7.176: Ejemplo 877.

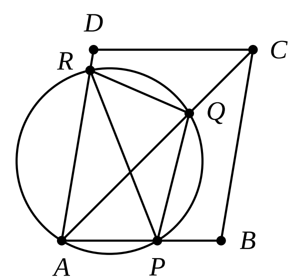


Figure 7.177: Ejemplo 878.

879 Ejemplo Sean A, B, C, D, E, F, G vértices, nombrados en orden, adyacentes de un heptágono regular. Demuéstrese que

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}.$$

▶**Resolución:** *En la figura 7.178, aplicando el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero cíclico ABCF*

$$AC \cdot BF = AB \cdot CF + BC \cdot FA.$$

Substituyendo BF por AD, BC por AB y FA por AC en la última desigualdad se obtiene

$$AC \cdot AD = AB \cdot AD + AB \cdot AC \implies \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB},$$

obteniéndose el resultado. ◀

880 Ejemplo En el $\triangle ABC$, $BC > CA > AB$. D yace en el lado BC y E yace en la prolongación de BA producida más allá de A de tal manera que $BD = BE = CA$. Si P yace en el lado AC de tal manera que E, B, D, P son cocíclicos y sea Q el otro punto de intersección de BP con el cicuncírculo del $\triangle ABC$. Demuéstrese que

$$AQ + CQ = BP.$$

Véase la figura 7.179.

▶**Resolución:** *Obsérvese que* $\triangle AQC \sim \triangle EPD$ *porque*

$$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$$

y $\widehat{AQC} = 180^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{EPD}$. *Por otra parte, el teorema de Ptolomeo implica que*

$$BP \cdot DE = BE \cdot DP + BE \cdot EP.$$

Así pues

$$BP = BE \cdot \frac{DP}{DE} + BD \cdot \frac{EP}{DE} = CA \cdot \frac{CQ}{CA} + CA \frac{AQ}{CA} = AQ + CD.$$

◀

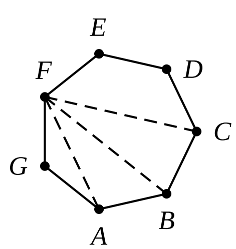


Figure 7.178: Ejemplo 879.

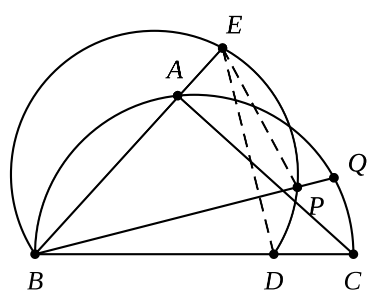


Figure 7.179: Ejemplo 880.

Tarea

881 Problema (Teorema de Van Aubel) Demostrar que si el $\triangle ABC$ tiene cevianas AA', BB', CC' que concurren en P entonces

$$\frac{CP}{PC'} = \frac{CA'}{A'B} + \frac{CB'}{B'A}.$$

7.14 Puntos y rectas notables de un triángulo

882 Definición Dado un $\triangle ABC$, si M_A, M_B, M_C son, respectivamente, los puntos medios de los lados BC, CA y AB, los segmentos AM_A, BM_B, CM_C son las *medianas* del triángulo.

883 Teorema Las medianas de un triángulo concurren.

Demostración: *Denótense los puntos medios de los lados BC, CA, AB por M_A, M_B, M_C. Refiérase a la figura 7.180. Por definición de las medianas*

$$BM_A = M_AC, \quad CM_B = M_BA, \quad AM_C = M_CB$$

y así

$$\frac{AM_C}{M_CB} \cdot \frac{BM_A}{M_AC} \cdot \frac{CM_B}{M_BA} = 1.$$

Luego las medianas concurren gracias al Teorema de Ceva (868). ❑

884 Definición El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo se llama el *centroide* o *baricentro*.

885 Teorema Todo triángulo es dividido por sus medianas en seis triángulos de área igual.

Demostración: *Como los $\triangle GBM_A$ y $\triangle GM_AC$ tienen bases de igual longitud y las misma altura, se tiene*

$$[\triangle GBM_A] = [\triangle GM_AC] = x,$$

digamos. De la misma manera

$$[\triangle GCM_B] = [\triangle GM_BA] = y, \qquad [\triangle GAM_C] = [\triangle GM_CB] = z.$$

Ahora bien

$$[\triangle CAM_C] = [\triangle CM_CB] \implies 2y + z = z + 2x \implies x = y,$$
$$[\triangle ABM_A] = [\triangle AM_AC] \implies 2z + x = 2y + x \implies y = z,$$

y por lo tanto $x = y = z$.❑

886 Corolario El baricentro G del $\triangle ABC$ triseca cada mediana. En efecto, $AG : GM_A = BG : GM_B = CG : GM_C = 2 : 1$.

Demostración: *Por el teorema 885, $[\triangle BM_AG] = 2[\triangle BM_AA]$. Como ambos triángulos tienen la misma altura,*

$$[\triangle BM_AG] = 2[\triangle BM_AA] \implies M_AG = 2GA \implies AG : GM_A = 2 : 1.$$

Las otras relaciones se demuestran de manera semejante.❑

887 Teorema Sea G el baricentro del $\triangle ABC$ y L una recta. Entonces

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3},$$

en donde A', B', C' denotan, respectivamente, los pies de las perpendiculares desde A, B, C en L.

Demostración: *Sea M el punto medio de CA y N el punto medio de BG, como en la figura 7.181. Entonces*

$$2GG' = MM' + NN',$$

de donde

$$4GG' = 2MM' + 2NN' = (AA' + CC') + (BB' + GG')$$

y por lo tanto, $3GG' = AA' + BB' + CC'$. ❑

888 Corolario Sea G el baricentro del $\triangle ABC$ y sea P un punto arbitrario. Entonces

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right).$$

Aún más, si $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$, entonces

$$G = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$

Demostración: *El resultado se obtiene de inmediato del teorema 887.* ❑

889 Definición El *triángulo medial* de un triángulo dado es el triángulo obtenido al unir los pies de las medianas del triángulo dado.

890 Teorema Los lados del triángulo medial son paralelos a los lados del triángulo original y miden la mitad de los lados correspondientes en el triángulo original. El área del triángulo medial es un cuarto del área del triángulo original.

Demostración: *Como $2AM_C = AB$ y $2AM_B = AC$, y los triángulos $\triangle AM_CM_B$ y $\triangle ABC$ comparten el A, se tiene que $\triangle AM_CM_B \sim \triangle ABC$. Luego $\widehat{AM_CM_B} = \widehat{ABC}$ y por lo tanto BC y M_CM_B son segmentos paralelos. Un argumento semejante demuestra que $AB \parallel M_AM_B$ y $AC \parallel M_AM_C$. Se sigue, además que $\triangle M_AM_BM_C \sim \triangle ABC$ y que $2M_AM_B = AB$, $2M_AM_C = AC$, $2M_CM_B = CB$.*

Ahora bien, como $\triangle M_AM_BM_C \sim \triangle ABC$, y $2M_BM_C = BC$, las alturas del $\triangle ABC$ son el doble de las alturas las alturas del $\triangle M_AM_BM_C$. Así pues $[\triangle ABC] = 4[\triangle M_AM_BM_C]$.❑

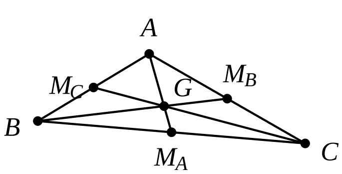


Figure 7.180: El baricentro. Teorema 883.

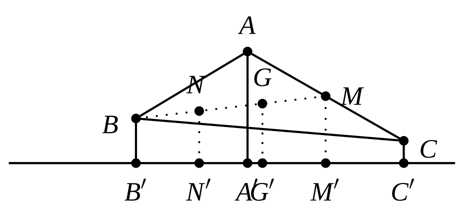


Figure 7.181: Teorema 887.

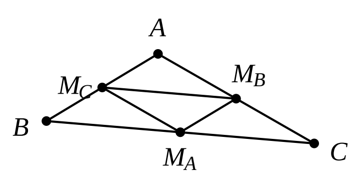


Figure 7.182: El triángulo medial.

891 Teorema En todo triángulo, el radio del circuncírculo de su triángulo medial es $\frac{R}{2}$, el radio del circuncírculo del triángulo original.

Demostración: *El resultado sigue inmediatamente del teorema 890.* ❑

892 Teorema (Generalización de la ley de los senos) En el $\triangle ABC$ póngase $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Sea R el radio del círculo circunscrito al $\triangle ABC$. Entonces

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

Demostración: *Se considerarán dos casos: si A is agudo u obtuso.*

Presúmase primero que A es agudo agudo. Sea DC un diámetro. Entonces $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{2}$ *al estar inscrito en un semicírculo. Así*

$$\operatorname{sen} D = \frac{a}{DC} = \frac{a}{2R}.$$

Ahora bien, $D = A$*, ya que ambos subtienden el mismo arco. Por lo tanto,*

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} D = \frac{a}{2R}.$$

De la misma manera se demuestra que

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{2R}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} C = \frac{c}{2R},$$

demostrando el teorema en el caso A agudo.

Presúmase ahora que A es obtuso. Se tiene que

$$\operatorname{sen} D = \frac{a}{2R}.$$

En este caso, $D = \pi - A$*, porque ángulos opuestos inscritos en un cuadrilátero son suplementarios. Como*

$$\operatorname{sen}(\pi - A) = \operatorname{sen}(\pi - A) = -\operatorname{sen}(-A) = \operatorname{sen} A,$$

se deduce que

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(\pi - A) = \operatorname{sen} D = \frac{a}{2R},$$

de donde queda demostrado el teorema. ❑

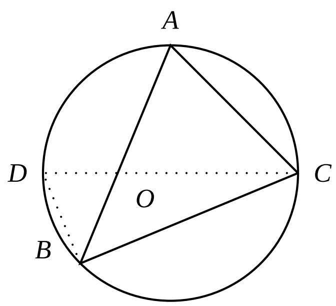


Figure 7.183: Generalización de la ley de los senos. A agudo.

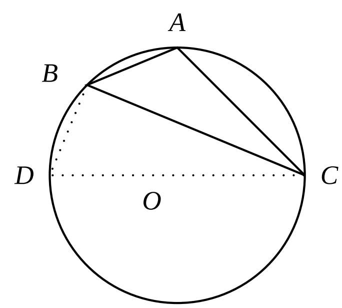


Figure 7.184: Generalización de la ley de los senos. A obtuso.

893 Teorema Sea R el radio del círculo circunscrito del $\triangle ABC$ y sean las longitudes de sus lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Entonces $[\triangle ABC] = \dfrac{abc}{4R}$.

Demostración: *Se tiene*

$$[\triangle ABC] = \frac{ab\operatorname{sen} C}{2} = \frac{abc}{4R},$$

por la ley de los senos. ❑

894 Teorema Las alturas de un triángulo concurren.

Demostración: *Obsérvese que*

$$\frac{AH_C}{H_CB} = \frac{\cot A}{\cot B}, \quad \frac{BH_A}{H_AC} = \frac{\cot B}{\cot C}, \quad \frac{CH_B}{H_BA} = \frac{\cot C}{\cot A} \implies \frac{AH_C}{H_CB} \cdot \frac{BH_A}{H_AC} \cdot \frac{CH_B}{H_BA} = 1.$$

Luego las alturas concurren gracias al Teorema de Ceva (Teorema 868).

❑

895 Definición El punto de concurrencia de las alturas de un triángulo se llama el *ortocentro* del triángulo.

896 Definición El *triángulo órtico* del $\triangle ABC$ es el triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas del $\triangle ABC$.

897 Teorema Las bisectrices angulares de un triángulo concurren.

Demostración: *Gracias al Teorema de la bisectriz (Teorema 693),*

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{CB}{C'B}, \quad \frac{AB}{BA'} = \frac{AC}{A'C}, \quad \frac{BC}{CB'} = \frac{AB}{B'A}, \implies \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$

y el resultado se obtiene por el Teorema de Ceva (teorema 868). ❑

898 Definición El punto de concurrencia de las bisectrices angulares de un triángulo se llama el *incentro*.

899 Teorema Sea r el radio del círculo inscrito del $\triangle ABC$ y sean las longitudes de sus lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Sea $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semi-perímetro. Entonces $[\triangle ABC] = sr$.

Demostración: *De a figura 7.79 se tiene*

$$[\triangle ABC] = [\triangle IBC] + [\triangle ICA] + [\triangle IAB] = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = sr.$$

❑

900 Teorema Las cevianas a los puntos de contacto de un triángulo con su círculo inscrito concurren.

Demostración: *En la figura 7.186, $AF = EA$, $FB = BD$ y $CE = EA$, ya que tangentes desde un punto a un círculo son congruentes. Luego*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

y las cevianas concurren gracias al Teorema de Ceva (teorema 868). ❑

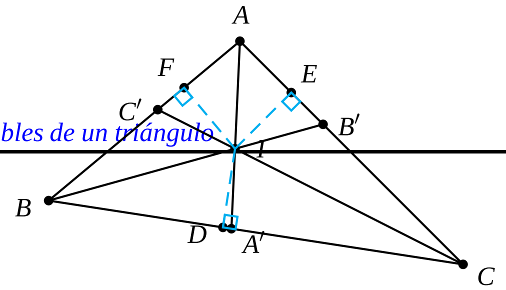


Figure 7.185: El incentro. Teorema 897.

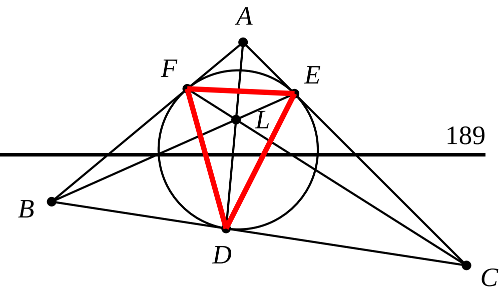


Figure 7.186: Punto de Gergonne y triángulo de Gergonne.

901 Definición El punto de concurrencia de las cevianas a los puntos de contacto de los lados de un triángulo con su círculo inscrito es el *punto de Gergonne*.

902 Definición El *triángulo de Gergonne* del $\triangle ABC$ es el triángulo cuyos vértices son los pies de las las cevianas a los puntos de contacto de los lados del $\triangle ABC$.

903 Teorema (Recta de Euler) En un triángulo dado, el ortocentro H, el circuncentro O y el baricentro G son colineales y se satisface

$$\frac{OG}{GH}=\frac{1}{2}.$$

Demostración: *Sea H_B la proyección del ortocentro H en el lado AC. Luego*

$$AH=\frac{AH_B}{\operatorname{sen} C}=\frac{c\cos A}{\operatorname{sen} C}=2R\cos A=2OM_A.$$

Si OH y AM_A se intersecan en G' entonces $\triangle AG'H\sim M_AG'O$ y $AG'=2G'M_A$. Esto implica que $G'=G$, el baricentro de $\triangle ABC$. ❑

904 Teorema Los pies de las tres alturas de cualquier triángulo, los puntos medios de los tres lados, y los puntos medios de los tres segmentos de los vértices al ortocentro todos yacen en el mismo círculo, llamado el círculo de nueve puntos de Euler-Feuerbach.

Demostración: *Como BC es un lado común al $\triangle ABC$ y $\triangle HBC$, cuyos otros dos lados son bisecados respectivamente por M_C, M_B y J, K ambos segmentos M_BM_C y JK son paralelos a BC y $2M_BM_C=2JK=BC$. De igual manera, AH es lado común a $\triangle BAH$ y $\triangle CAH$, de donde M_CJ y M_BK son paralelos a AH y $2M_CJ=2M_BK=AH$. De aquí, M_BM_CJK es un paralelogramo y como $BC\perp AH$, M_BM_CJK es un rectángulo. De igual manera, M_AM_BIJ y M_CM_AKI son rectángulos. Luego M_AI, M_BJ y M_CK son tres diámetros de un círculo. Como $\widehat{M_AH_AI}=\dfrac{\pi}{2}$, el círculo con M_AI como diámetro pasa por H_A. De igual manera se demuestra que pasa por H_B y por H_C.*❑

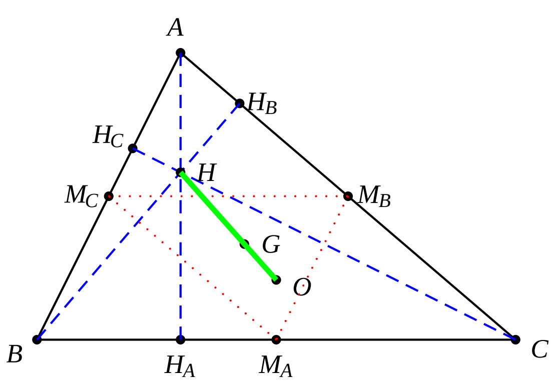


Figure 7.187: Recta de Euler.

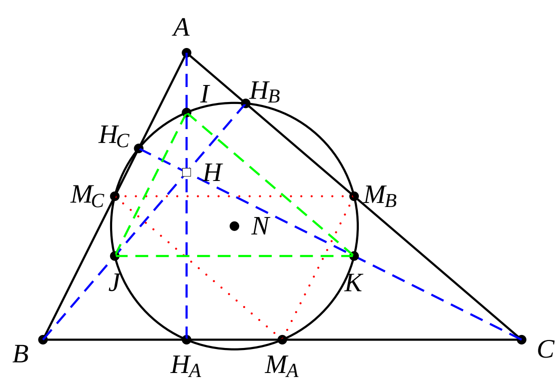


Figure 7.188: Círculo de nueve puntos de Euler-Feuerbach.

905 Teorema El radio del círculo de nueve puntos es $\frac{R}{2}$, la mitad del radio del círculo circunscrito. Su centro es el circuncentro del triángulo medial.

Demostración: *Al pasar el circuncírculo medial y el círculo de nueve puntos por M_A, M_B y M_C, ambos círculos coinciden, de donde se deriva la aserción, ya que el radio del circuncírculo del triángulo medial es $\frac{R}{2}$.* ❑

906 Ejemplo Dos círculos C_1 (con centro O_1) y C_2 (con centro O_2) se intersecan en los puntos A y B, como en la figura . Al extender la recta O_1B, esta se interseca con C_2 en E. Al extender la recta O_2B, esta se interseca con C_1 en F. Se construye una recta paralela a EF a través de B cortando a C_1 en M y a C_2 en N. Demuéstrese que B ese el incentro del $\triangle AEF$ y que $MN = AE + AF$.

►**Resolución:** *Obsérvese que $\triangle O_1AO_2 \equiv O_1BO_2$ y por tanto*

$$\widehat{O_1AO_2} = \widehat{O_1BO_2} = 180^\circ - \widehat{O_1BF} = 180^\circ - \widehat{O_1FO_2}$$

y así AO_1FO_2 es un cuadrilátero cíclico. Por simetría, E también yace en este círculo, de donde se ha demostrado que B es el incentro del $\triangle AEF$.

Ahora bien, $\widehat{AO_1B} = 2\widehat{AFB}$ y $\widehat{MO_1F} = 2\widehat{MBF} = 2\widehat{EFB}$. Como B yace el bisector angular interior del $\widehat{AFE}$, se ha demostrado que $AF = MB$. De igual manera se demuestra que $AE = NB$ por lo tanto $MN = AE + AF$. ◄

907 Teorema Un punto P dentro del $\triangle ABC$ es el incentro del triángulo si y sólo si

1. P yace en el bisector angular del ángulo $\widehat{CAB}$ y

2. $\widehat{BPC} = \dfrac{180^\circ + \widehat{CAB}}{2}$.

Demostración: *Es claro que el incentro de un triángulo satisface las condiciones mencionadas. Por otra parte, el conjunto de puntos en el plano que satisface la primera condición es un segmento de recta dentro del triángulo, en tanto el conjunto de puntos que satisface la segunda condición es un arco. La intersección de estos dos lugares geométricos es obviamente única, el incentro del triángulo.* ❑

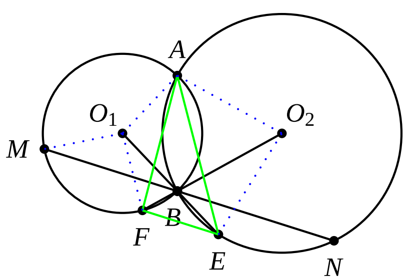


Figure 7.189: Ejemplo 906.

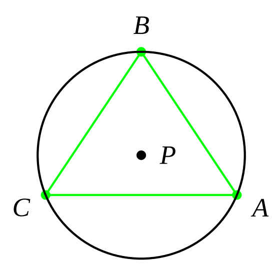


Figure 7.190: Teoremas 907 y thm:criterio-ortocentro.

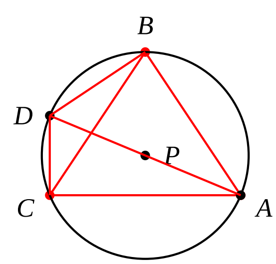


Figure 7.191: Teorema 909.

La siguiente aserciones son evidentes.

908 Teorema Un punto P dentro del triángulo agudo ABC es el ortocentro del triángulo si y sólo si

1. $AP \perp BC$ y
2. $\widehat{CAB}+\widehat{CPB}=180^\circ$.

909 Teorema Sea D un punto en el circuncírculo del $\triangle ABC$ tal que AD biseca al $\widehat{CAB}$. Un punto P en el segmento AD es en el incentro del triángulo si y sólo si $DB=DP$ (o lo que es equivalente, $DC=DP$). En este caso, D es el circuncentro del $\triangle BPC$.

910 Ejemplo (IMO 2002) Sea BC un diámetro del círculo $\mathscr{C}$ con centro O. Sea A un punto en $\mathscr{C}$ tal que $\widehat{AOC}>60^\circ$. Sea D el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a C. La recta a través de O paralela a DA interseca a AC en J. La mediatriz perpendicular de OA interseca con $\mathscr{C}$ en E y F. Demostrar que J es el incentro del $\triangle CEF$.

►**Resolución:** *Como $EA=EO$ y $OE=OA$, $\triangle OAE$ es equilátero. Ya que $\triangle AOC>60^\circ$, F yace en el arco menor $\widehat{AC}$. Se sigue que $\widehat{ACF}=\widehat{AEF}=\dfrac{1}{2}=30^\circ$ y $\widehat{ACE}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOE}=30^\circ=\widehat{ACF}$, de donde J yace en el bisector angular $\widehat{ECF}$. Ahora bien, $\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOB}=\widehat{DOB}$, luego $AC \parallel DO$ y por lo tanto $ADOJ$ es un paralelogramo. Luego $AJ=DO=AO=AE$. Por el teorema 909, J es el incentro del $\triangle CEF$.* ◄

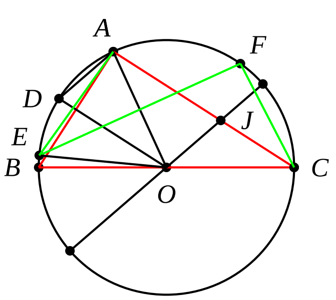


Figure 7.192: Ejemplo 910.

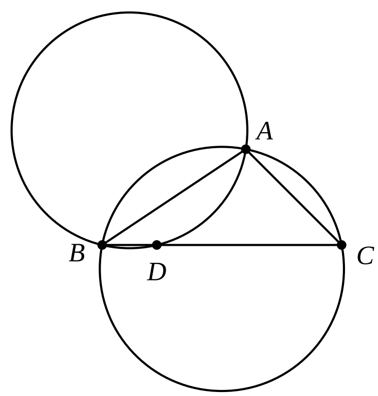


Figure 7.193: Ejemplo 911.

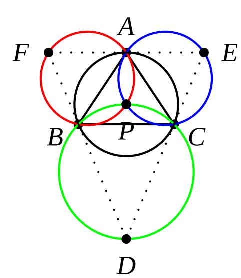


Figure 7.194: Teorema 912.

911 Ejemplo (CMO 1999) En el triángulo agudo ABC, $C>B$, D es un punto en BC tal que $\widehat{ADB}$ es obtuso. Sea H el ortocentro del $\triangle ABD$. El punto F está en el interior del $\triangle ABC$ y en el circuncírculo del $\triangle ABD$. Demuéstrese que F es el ortocentro del $\triangle ABC$ si y sólo si $HD \parallel CF$ y H yace en el circuncírculo del $\triangle ABC$.

►**Resolución:** *Por el teorema 908 se necesita demostrar que*

1. *$CF \perp AB$*
2. *$\widehat{BCA}+\widehat{BFA}=180^\circ$.*

Como H es el ortocentro del $\triangle ABD$, se tiene $HD \perp AB$. Así (1) es equivalente a $HD \perp CF$. Se necesita demostrar ahora que (2) es satisfecha si y sólo si H yace en el circuncírculo del $\triangle ABC$. Obsérvese que $\widehat{AFB} = \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{AHB}$. Así, (2) se convierte en $\widehat{ACB} = AHB$, que equivale a decir que H yace en el circuncírculo del $\triangle ABC$.
◀

912 Teorema (Teorema de los tres círculos de Carnot) Tres círculos de radio unidad se encuentran en el punto P y las otras intersecciones de cada dos de ellos son los puntos A, B y C. Demuéstrese que P es el ortocentro del $\triangle ABC$ y que circunradio de $\triangle ABC$ es 1.

Demostración: *Sean D, E, F los puntos en cada círculo diametralmente opuestos a P. Obsérvese que $\widehat{PAE} = \widehat{PAF} = 90^\circ$ y $PE = PF = 2$, lo que implica que A yace en el segmento EF y PA es la mediatriz perpendicular de EF. De igual manera, PB y PC son las mediatrices perpendiculares de PD y DE respectivamente.*

En adición, el $\triangle ABC$ es el triángulo medial del $\triangle DEF$, y por lo tanto el circunradio del $\triangle ABC$ es la mitad del circunradio del $\triangle DEF$. Como P es el circuncentro del $\triangle DEF$, P es además el ortocentro del triángulo medial del $\triangle ABC$ y el circunradio del $\triangle DEF$ es 2. Luego, el circunradio del $\triangle ABC$ es 1.❑

Tarea

913 Problema Demuéstrese que el circuncentro de un triángulo coincide con el ortocentro de su triángulo medial.

914 Problema En el $\triangle ABC$, los puntos $L, M =, N$ yacen sobre los segmentos $[AB]$, $[BC]$ y $[CA]$, respectivamente, satisfaciendo

$$\frac{AL}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA}.$$

Demostrar que los baricentros de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$ coinciden.

915 Problema Por el baricentro G de un triángulo se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuéstrese que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

7.15 Potencia de un punto con respecto a un círculo

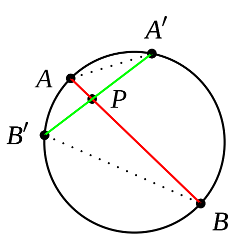


Figure 7.195: Teorema 916.

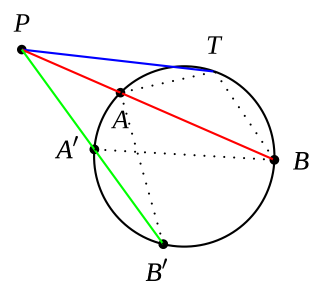


Figure 7.196: Teorema 916.

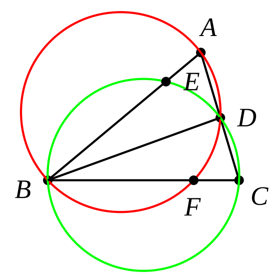


Figure 7.197: Ejemplo 921.

916 Teorema (Intersección de cuerdas) Sea $\mathscr{C}$ un círculo y P un punto no en $\mathscr{C}$. Sea L una recta pasando por P que interseca a $\mathscr{C}$ en los puntos A y B. Entonces la cantidad $PA \times PB$ es independiente de L, esto es, si L' es otra recta que pasa por P y que interseca a $\mathscr{C}$ en A' y B', se tiene

$$PA \times PB = PA' \times PB'.$$

Recíprocamente, si A, B, A', B, son cuatro puntos no alineados, si las rectas AB y $A'B'$ se encuentran en P y si $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ como segmentos dirigidos, entonces A, B, A', B' yacen en el mismo círculo.

Demostración: *Supóngase primero que P yace en el interior del círculo. De la figura 7.195 se tiene $\widehat{AA'P} = \widehat{PBB'}$ y $\widehat{APA'} = \widehat{BPB}'$, así $\triangle PAA' \sim \triangle PB'B$, dando $PA/PB' = PA'/PB$, esto es $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.*

Supóngase ahora que P está en el exterior del círculo. Sea T un punto de tangencia desde P, como en la figura 7.196. Entonces $\triangle PTA \sim PBT$ y $\triangle PBA' \sim \triangle PB'A$. Así

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}; \qquad \frac{PB}{PA'} = \frac{PB'}{PA} \implies PT^2 = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

Recíprocamente, sea $\mathscr{C}$ el circuncírculo del triángulo $\triangle ABA'$. La recta PA' corta $\mathscr{C}$ en un punto C tal que $PA \cdot PB = PA' \cdot PC$. Luego

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB', \quad PA \cdot PB = PA' \cdot PC \implies PB' = PC.$$

Como PB' y PC son segmentos dirigidos, se tiene $B' = C$, completando la demostración. ❑

917 Definición La cantidad $PA \times PB$ en el teorema 916 se llama *potencia de P* con respecto al círculo $\mathscr{C}$.

918 Teorema Un círculo de radio r con centro I está dentro de un círculo de radio $R > r$ y centro O. Sea A un punto arbitrario en el círculo mayor, y sean AB y AC dos cuerdas en el círculo mayor, ambas tangentes al círculo menor. Entonces BC es tangente al círcul menor si y sólo si $IO = \sqrt{R(R-2r)}$.

Demostración: *Sea S un punto en el círculo mayor tal que AS es la bisectriz angular del $\widehat{BAC}$. Trácese CI y CS.*

BC es tangente al círculo menor si y sólo si $BCI = ICA$. A su vez, esto sucede si y sólo si $SCI = CIS$, ya que $CIS = ICA + IAC = ICA + \widehat{SCB}$. Además, $SCI = CIS$ si y sólo si $SC = SI$. Sea $MN = 2R$ el diámetro del círculo mayor que pasa por I y O. Entonces $SC = SI$ si y sólo si $SI \cdot IA = SC \cdot IA = 2R \operatorname{sen}\alpha \cdot \dfrac{r}{\operatorname{sen}\alpha} = 2rR$, en donde $\alpha = \widehat{CAS}$.

En virtud del teorema , $SI \cdot IA = MI \cdot IN = (R-d)(R+d)$, en donde $d = IO$. Luego se tiene $SI \cdot IA = 2rR$ si y sólo si $(R-d)(R+d) = 2rR$, lo que equivale a $d^2 = R^2 - 2rR$. ❑

919 Corolario (Teorema de Euler) Sea I el centro del círculo inscrito y O el centro del círculo circunscrito al triángulo $\triangle ABC$. Entonces

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

920 Corolario Dos reales $r > 0$ y $R > 0$ son el radio del círculo inscrito y el radio del círculo circunscrito del $\triangle ABC$, respectivamente, si y sólo si $R \geq 2r$. Además, $R = 2r$ si y sólo si el $\triangle ABC$ es equilátero. Si $R > 2r$ entonces existe un número infinito de triángulos no semejantes teniendo a R como circunradio y r como inradio.

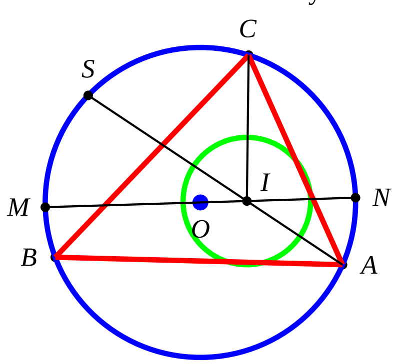


Figure 7.198: Teorema 918.

921 Ejemplo (SPCMO 1996) Sea BD la bisectriz angular del B del $\triangle ABC$ con D yaciendo en AC. El circuncírculo del $\triangle BDC$ interseca a AB en E y el circuncírculo del $\triangle ABD$ interseca a BC en F. Demuéstrese que $AE = CF$.

►**Resolución:** *Por el teorema 916,*

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}, \qquad \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CB} \implies \frac{AE}{CF} = \frac{AD \times CB}{AB \times CD} = 1,$$

pero esta última cantidad es 1, *por el Teorema de la bisectriz angular.* ◄

922 Ejemplo Sean A, B, C, D cuatro puntos alineados en este orden. Los círculos con diámetros AC y BD se intersecan en los puntos X y Y. La recta XY interseca la recta BC en el punto Z. Sea P un punto en XY distinto de Z. La recta CP interseca al círculo con diámetro AC en los puntos C y M. La recta CP interseca al círculo con diámetro AC en los puntos C y M. La recta BP interseca al círculo con diámetro BD en los puntos B y N. Demuéstrese que las rectas AM, DN y XY son concurrentes.

►**Resolución:** *Trácese DE paralelo a CM, intersecando XY en E. Trácese AE' paralelo a BN, intersecando XY en E'. Se quiere demostrar que $E = E'$. Obsérvese que*

$$\frac{ZE'}{ZE} = \frac{ZE'}{ZP} \cdot \frac{ZP}{ZE} = \frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{ZC}{ZD}. \tag{7.19}$$

Por el teorema 916

$$ZA \cdot ZC = ZX \cdot ZY = ZB \cdot ZD.$$

Por lo tanto (7.19) da $ZE = ZE'$. Se concluye que AM, DN, XY son las alturas del $\triangle ADE$ y por lo tanto, concurrentes. ◄

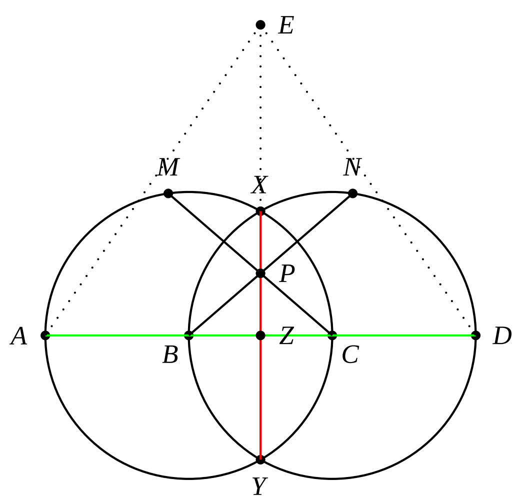


Figure 7.199: Ejemplo 922.

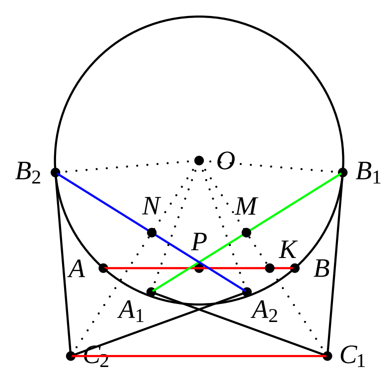


Figure 7.200: Ejemplo 923.

923 Ejemplo AB es una cuerda de un círculo que no es un diámetro. Las cuerdas A_1B_1 y A_2B_2 se intersecan en el punto medio P de AB. Las tangentes al círculo desde A_1 y B_1 se intersecan en C_1 y las tangentes desde A_2 y B_2 se intersecan en C_2. Demuéstrese que $C_1C_2 \parallel AB$.

►**Resolución:** *Sea O el centro del círculo, dígase que OC_1 interseca a A_1B_1 en M, OC_2 interseca a A_2B_2 en N y OC_1 interseca a AB en K. Evidentemente, OM y ON son, respectivamente, las mediatrices perpendiculares de A_1B_1 y A_2B_2. Así, $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90^\circ$, por lo que O, M, P, N yacen en el mismo círculo. Esto implica que $\widehat{ONM} = \widehat{OPM} = 90^\circ - \widehat{MOP} = \widehat{OKA}$.*

Ahora se demostrará que M, C_1, C_2, N yacen en el mismo círculo. Obsérvese que $\triangle OA_1C_1$ y $\triangle OB_2C_2$ son triángulos rectángulos, de donde

$$OM \cdot OC_1 = OA_1^2 = OB_2^2 = ON \cdot OC_2.$$

Se tiene pues que $\widehat{OC_1C_2} = \widehat{ONM} = \widehat{OKA}$, completando la demostración. ◄

Tarea

924 Problema Demostrar que si las cuerdas A_1B_1 and B_1C_1 en el circuncírculo del $\triangle ABC$ son tangentes al incírculo, la cuerda C_1A_1 (en el circuncírculo) es también tangente al incírculo.

Appendix A

Indicaciones y respuestas

8 Presúmase que $AC \geq BC$ y colóquese D en el segmento de recta AC de tal manera que $AD = BD$. Luego $\triangle ADB$ es isósceles en D y se tendrá $A = B$, contradicción.

9 Si $\sqrt{a} \leq \alpha$ entonces $\alpha \leq \alpha^2$, lo que implica que $\alpha(1-\alpha) \leq 0$, desigualdad imposible al ser $0 < \alpha < 1$.

10 Se tiene $1 - \dfrac{1}{10^{2000}} < \alpha < 1$. En cuadrando,

$$1 - \frac{2}{10^{2000}} + \frac{1}{10^{4000}} < \alpha^2.$$

Ya que $-\dfrac{1}{10^{2000}} + \dfrac{1}{10^{4000}} < 0$, se tiene

$$1 - \frac{1}{10^{2000}} < 1 - \frac{1}{10^{2000}} - \frac{1}{10^{2000}} + \frac{1}{10^{4000}} < \alpha^2.$$

11 Se tiene

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 2x + 2 &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ &= x^4 + (a+c)x^3 + (d+b+ac)x^2 + (ad+bc)x + bd. \end{aligned}$$

Así

$$bd = 2, \quad ad + bc = 2, \quad d + b + bc = 2, \quad a + c = 2.$$

Presúmase que a, b, c, d son íntegros. Entonces como $bd = 2$, b y d deben ser de paridad opuesta, el uno par y el otro non. Luego $d + b$ sería non, y como $d + b + bc = 2$, bc debería ser non, lo que hace tanto a b como a c nones, de donde d es par. Así pues ad es par y $ad + bc = 2$ no puede ser, ya que ad es par y bc non, contradicción.

20 Decompóngase el conjunto en los n pares

$$\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}.$$

Como siempre se tomarán dos enteros consecutivos, estos serán relativamente primos.

21 Cada entero es de la forma $2^a m$ en donde $a \geq 0$ es entero y m es impar. Como solamente hay n enteros impares en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, de los $n+1$ enteros tomados, dos tendrán la misma parte impar, digamos $2^a m$ y $2^b m$. Luego si $a < b$ se tendrá que $2^a m$ dividirá a $2^b m$. Se dará otra solución en el problema 47

22 Hay n residuos posibles diferentes cuando se divide a un entero por n, así entre $n+1$ enteros diferentes habrá dos dejando el mismo residuo al dividirse por n. Su diferencia será divisible por n.

23 20

24 Divídase al cuadrado en 4 subcuadrados congruentes, con lados paralelos al cuadrado original. Dos de los cinco puntos caerán en un subcuadrado. Pero como la distancia máxima en un subcuadrado es su diagonal de $\sqrt{2}/2$ unidades de longitud, el resultado se cumple.

38 Hay 27 sumas distintas. Las sumas 1 y 27 se obtienen de manera única (en 100 y 999). Cada una de las otras 25 sumas aparece al menos tres veces. Luego si se sacan $27 + 25 + 1 = 53$ boletas, al menos 3 tendrán la misma suma.

45 Sea $P(n)$ la aseveración: "$(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}$ es par y $(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}=b\sqrt{2}$ para algún $b\in\mathbb{N}$." Si $n=1$, entonces vemos que

$$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=6,$$

que es par y que

$$(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2=4\sqrt{2}.$$

Así $P(1)$ cierta es. Presúmase que $P(n-1)$ es cierta para $n>1$, i.e., presúmase que

$$(1+\sqrt{2})^{2(n-1)}+(1-\sqrt{2})^{2(n-1)}=2N$$

para algún entero N y que

$$(1+\sqrt{2})^{2(n-1)}-(1-\sqrt{2})^{2(n-1)}=a\sqrt{2}$$

para algún entero positivo a.

Considérese ahora

$$(1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}=(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2n-2}+(1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2n-2}.$$

Esto es

$$(3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n-2}+(3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n-2}.$$

En utilizando $P(n-1)$, esto simplifica a

$$12N+2\sqrt{2}a\sqrt{2}=2(6N+2a),$$

un entero par y de manera semejante

$$(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}=3a\sqrt{2}+2\sqrt{2}(2N)=(3a+4N)\sqrt{2},$$

estableciendo la veracidad de $P(n)$.

46 Para $n=1$, la aseveración es cierta, ya que $k^2-1=(k-1)(k+1)$ es el producto de dos enteros pares consecutivos, y por lo tanto divisible por 8. Hágase la hipótesis que $2^{n+2}|k^{2^n}-1$, y demostremos que $2^{n+3}|k^{2^{n+1}}-1$. Como $k^{2^{n+1}}-1=(k^{2^n}-1)(k^{2^n}+1)$, vemos que 2^{n+2} divide a$(k^{2n}-1)$, de donde el problema se reduce a demostrar que $2|(k^{2n}+1)$. Pero esto es obvio ya que el impar k^{2n} torna a $k^{2n}+1$ par.

47 Este es el problema 47. Aquí se dará una solución por inducción. Nótese que la solución utilizando el principio de las pichoneras es más sucinta.

Supóngase que de entre los $2n$ números $1,2,\dots,2n$, con $n\geq 2$, se han encontrado $n+1$ números tales que ninguno de ellos es divisible por cualquier otro. Denótese este conjunto de $n+1$ números por M_{n+1}. Se demostrará que si así occurriese sería posible seleccionar de entre los $2n-2$ números $1,2,\dots,2n-2$, un conjunto conteniendo n números tales que ninguno de los n números sea divisible por cualquier otro. Se observan los siguientes casos:

1. M_{n+1} no contiene al número $2n-1$ ni al número $2n$.
2. M_{n+1} contiene a $2n-1$ pero no a $2n$.
3. M_{n+1} contiene a $2n$ pero no a $2n-1$.
4. M_{n+1} contiene tanto a $2n-1$ como a $2n$.

Veamos

1. Quítese un número arbitrario del conjunto M_{n+1} . Entonces quedan n números ninguno de los cuales es mayor que $2n-2$. Ninguno de éstos es divisible por cualquier otro.
2. Quítese el número $2n-1$ del conjunto M_{n+1} . Efectivamente, de nuevo, entre los n números restantes, ninguno es mayor que $2n-2$ y ninguno de ellos es divisible por otro cualquiera.
3. Quítese el número $2n$ del conjunto M_{n+1} ; el resultado es el mismo que en los casos 1 y 2.
4. Antes que todo, obsérvese que el número n no puede pertenecer al conjunto M_{n+1} ; en caso contrario, el conjunto M_{n+1} contendría a dos los números n y $2n$; y $2n$ es divisible entre n. Quítese ahora los dos números $2n-1$ y $2n$ del conjunto M_{n+1}. Denótese por M_{n-1} al conjunto de los $n-1$ números que quedan. A continuación agréguese el número n al conjunto M_{n-1}, obteniendo de este modo un conjunto de n números, ninguno de los cuales es mayor que $2n-2$. Falta demostrar que de estos n números, ninguno será divisible por cualquier otro. Como el conjunto M_{n+1} no contuvo dos números de los cuales uno fuera divisible por el otro, el conjunto M_{n-1} tampoco contendrá tales números. Por lo tanto, es sólo necesario el demostrar que no existe dos números tales, aún cuando se agrega el número n al conjunto M_{n-1}. Para hacerlo, basta demostrar (I) Que ningún número en M_{n-1} es divisible por n y (II) Que n no es divisible por número alguno en M_{n-1}. La primera proposición se deduce del hecho de que de los números en M_{n-1}, ninguno es mayor que $2n-2$. La segunda se deduce del hecho de que $2n$ no es divisible por número alguno de en M_{n-1}. Así se ha demostrado que si la proposición es falsa para los $2(n-1)$ números $1,2,\dots,2n-2$. De aquí que, si la proposición es verdadera para los $2(n-1)$ números $1,2,\dots,2n-2$, también debe ser verdadera para los $2n$ números $1,2,\dots,2n$. La proposición es verdadera para los dos números 1 y 2; de aquí que es verdadera para todos los conjuntos de $2n$ números $1,2,\dots,2n$, donde n es un número natural.

48 Para $n = 1$, tenemos

$$0 \cdot 1 = f_0 f_1 = 1^2 - (1)^1 = f_1^2 - (1)^1,$$

de donde la aserción es cierta para $n = 1$. Supongamos que $n > 1$, y que la aserción es cierta para n, esto es

$$f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n.$$

Usando $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, y por la hipótesis de inducción, $f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} - (-1)^n$. Esto significa que

$$\begin{aligned}
f_n f_{n+2} &= f_n(f_{n+1} + f_n) \\
&= f_n f_{n+1} + f_n^2 \\
&= f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} - (-1)^n \\
&= f_{n+1}(f_n + f_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\
&= f_{n+1} f_{n+1} + (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

de donde se colige el resultado.

49 Utilizarase inducción robusta. Obsérvese que $8 = 3 + 5, 9 = 3 + 3 + 3, 10 = 5 + 5$, de donde se puede pagar $8, 9$, o 10 pesos con las susodichas monedas. Presúmase que se puede pagar $n - 3, n - 2$, y $n - 1$ pesos, esto es, que $3x + 5y = k$ tiene soluciones no negativas para $k = n - 3, n - 2$ y $n - 1$. Demostrarase que también se pueden obtener soluciones para $3x + 5y = k$ con $k = n, n + 1$ y $n + 2$. Ahora,

$$3x + 5y = n - 3 \Longrightarrow 3(x + 1) + 5y = n,$$

$$3x_1 + 5y_1 = n - 2 \Longrightarrow 3(x_1 + 1) + 5y_1 = n + 1,$$

$$3x_2 + 5y_2 = n - 1 \Longrightarrow 3(x_2 + 1) + 5y_2 = n + 2,$$

y así si las cantidades $n - 3, n - 2, n - 1$ se pueden pagar, también se puede pagar las cantidades $n, n + 1, n + 2$. La aseveración queda demostrada por inducción robusta.

50 El resultado es inmediato para $n = 1$ ya que $1 - \frac{1}{4} = \frac{1 + 2}{2(1 + 1)}$. Presúmase que para $k > 1$

$$1 - \frac{1}{4} \quad 1 - \frac{1}{9} \quad \cdots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Por la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{4} \quad 1 - \frac{1}{9} \quad \cdots \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= \frac{k+2}{2(k+1)}\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) \\
&= \frac{k+2}{2(k+1)}\left(\frac{k^2 + 4k + 3}{(k+2)^2}\right) \\
&= \frac{k+2}{2(k+1)}\left(\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right) \\
&= \frac{k+3}{2(k+2)},
\end{aligned}$$

estableciendo el resultado para $k + 1$.

51 Para $n = 0$ esto es cierto, ya que $0^3 + 1^2 + 2^3 = 9$. Presúmase que $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9N$, en donde N es un entero. Se demostrará que $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ es también un múltiplo de 9. Pero

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9N + (k+3)^3 - k^3,$$

en virtud de la hipótesis de inducción. Esto es

$$9N + (k+3)^3 - k^3 = 9N + (k^3 + 9k^2 + 27k + 27) - k^3 = 9N + 9k^2 + 27k + 27 = 9(N + k^2 + 3k + 3),$$

múltiplo de 9, como se quería demostrar.

52 El enunciado es obvio para $n = 1$. Si

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

para $n > 1$ entonces

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = .$$

Se demostrará que para $n > 1$

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Pero esto de inmediato resulta de la desigualdad

$$n(n+1) < (n+1)^2 \implies \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \quad 1 - \frac{1}{n+1} \quad = \frac{1}{n+1}.$$

53 Primero demostramos que todos los elementos de $\mathscr{C}$ poseen la misma paridad. De cierto, sea $x \in \mathscr{C}$ y sean A (con suma de elementos a) y B (con suma de elementos b) dos subconjuntos con n elementos cada uno verificando

$$\mathscr{C} \setminus \{x\} = A \cup B; \qquad A \cap B = \varnothing; \qquad a = b.$$

De manera semejante, sea $y \in \mathscr{C}$ y sean A' (con suma de elementos a') y B' (con suma de elementos b') dos subconjuntos con n elementos cada uno verificando

$$\mathscr{C} \setminus \{x\} = A' \cup B'; \qquad A' \cap B' = \varnothing; \qquad a' = b'.$$

Si c es la suma de todos los elementos en $\mathscr{C}$ entonces $c = x + a + b = x + 2a$ y también $c = y + a' + b' = y + 2a'$. Así $y - x = 2(a' - a)$ y x, y tienen la misma paridad.

Ahora demostraremos la igualdad de todos los elementos por inducción, donde n se mantendrá fijo y se inducirá en el máximo de los elementos de

$$\mathscr{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{2n+1}\}.$$

Si $\max_{1 \le i \le 2n+1} = 1$ entonces $c_1 = c_2 = \ldots = c_{2n+1} = 1$, por ser todos los elementos estrictamente positivos. Presumáse pues que el enunciado es cierto cuando $\max_{1 \le i \le 2n+1} c_i = t > 1$. Sea

$$\mathscr{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_{2n+1}\}$$

un conjunto de enteros positivos no nulos verificando la propiedad del enunciado con $\max_{1 \le i \le 2n+1} f_i = t + 1$. . Tenemos dos casos: o bien todos los elementos de $\mathscr{F}$ son pares o bien todos nones.

Si todos los elementos de $\mathscr{F}$ son pares, aplica la hipótesis de inducción a $\{f_1/2, f_2/2, \ldots, f_{2n+1}/2\}$ porque

$$\max_{1 \le i \le 2n+1} f_i/2 = (t+1)/2 < t$$

y al ser todas las $f_i/2$ idénticas también lo serán las f_i.

Si todos los elementos de $\mathscr{F}$ son nones, aplica la hipótesis de inducción a $\{(f_1+1)/2, (f_2+1)/2, \ldots, (f_{2n+1}+1)/2\}$ porque

$$\max_{1 \le i \le 2n+1} (f_i+1)/2 = (t+2)/2 < t$$

y al ser todas las $(f_i+1)/2$ idénticas también lo serán las f_i.

54 Razonamos por inducción sobre $m + n$. Como

$$n \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n < mn,$$

se sigue que $m > 1$. De igual manera se demuestra que $n > 1$. Para $m + n = 4$ se tiene $m = n = 2$, y las igualdades posibles son $1 + 1 = 1 + 1$ y $1 + 2 = 2 + 1$, de donde se colige el resultado. Supóngase que el resultado es cierto para $k = m + n \ge 4$ y considérese

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n < mn,$$

donde $m + n = k + 1$. Sin perdida de generalidad se puede presumir que a_1 es la mayor de todas las a_i y que b_1 es la mayor de todas las b_i. Si $a_1 = b_1$ no cabrá nada que demostrar, pues se podrán suprimir estos términos y se logrará una suma restante idéntica. Si $a_1 > b_1$ entonces

$$(a_1 - b_1) + a_2 + \cdots + a_n = b_2 + \cdots + b_n,$$

y

$$b_2 + \cdots + b_n < mn - \frac{mn}{m} = n(m-1).$$

Como $n + (m-1) = k$, podemos aplicar la hípótesis de inducción, obteniendo el resultado.

55 Las figuras A.1, A.2, y A.3 proveen una descomposición en 4, 6, y 10 subtriángulos, respectivamente. Así pues, dado n, se puede construir o bien $n+3$ triángulos o $n+5$ triángulos. Obsérvese ahora que toda $n \geq 6$ puede ser escrita de la manera $3x+5y=n$, lo que se puede demostrar con otra inducción, a la manera del problema 49.

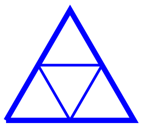


Figure A.1: 4 subtriángulos equiláteros.

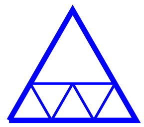


Figure A.2: 6 subtriángulos equiláteros.

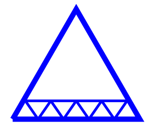


Figure A.3: 10 subtriángulos equiláteros.

56 Si s fuese una potencia de 2 entonces no hay nada que demostrar. Si s yace estrictamente entre dos potencias de 2, digamos $2^{r-1} < s < 2^r$, entonces $s < 2^r < 2s < 2^{r+1}$, por lo que el intervalo $[s;2s]$ contiene a 2^r, una potencia de 2.

61 Si la tuviere entonces
$$a_{m+1}^2 - a_m^2 = a_m^2 - a_{m-1}^2 \qquad m = 2,3,4,\ldots.$$
Como claramente se tiene $a_{m+1}+a_m > a_m + a_{m-1}$ se deberá tener
$$a_{m+1} - a_m < a_m - a_{m-1}$$
para $m \geq 2$. Esto se puede escribir como
$$a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > \ldots$$
una sucesión infinita de enteros positivos estrictamente decreciente, lo que es imposible.

65 Sea O el centro del disco, y sean $A_1, A_2, \ldots A_7$ los siete puntos en cuestión. Si ninguno de ellos es el centro del disco, entonces el menor entre los ángulos $\widehat{A_iOA_j}$ es estrictamente inferior a 60°. Sean A y B los puntos correspondientes a este ángulo. Por la ley de los cosenos de Al-Kashi
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \widehat{AOB} \implies AB < 1,$$
lo que es una contradicción.

81 Ponga $x = 123456789$. Entonces $x^2 - (x+2)(x-2) = 4$.

82 52

84 Pista:
$$2222^{5555} + 5555^{2222} = (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}).$$

159 Pista: $n^2 + 15n + 122 \equiv n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2) \mod 6$.

161 63

167 Pista: Demuestre primero que $3^{20} \equiv 1 \mod 100$.

180 2

181 \$0.73

195 Los puntos 16, 17, ..., 48 son 33 en total y están del mismo lado del diámetro que une al punto 15 con el 49. Para cada uno de estos hay un punto correspondiente y opuesto en la circunferencia. Así pues hay un total de $2 \cdot 33 + 2 = 68$ puntos en total.

196 Los factores de 2^{95} son $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{95}$. Observemos que $2^{10} = 1024$ y por lo tanto $2^{20} = 1048576$. Luego $2^{19} = 524288 < 1000000 < 1048576 = 2^{20}$. Por lo tanto, son los factores $2^{20}, 2^{21}, \ldots 2^{95}$ los mayores de 1000000. Estos constituyen un total de $95 - 20 + 1 = 76$ factores.

197 En utilizando

$$9\cdot 1 = 9 \qquad \text{enteros de 1-dígito,}$$

$$90\cdot 2 = 180 \qquad \text{enteros de 2-dígitos,}$$

$$900\cdot 3 = 2700 \qquad \text{enteros de 3-dígitos,}$$

un total de $9+180+2700 = 2889$ dígitos han sido utilizados, así pues el 3000-avo dígito debe de pertenecer a los enteros positivos de 4-dígitos. Quedan pues $3000-2889 = 111$ dígitos para ser usados y como $111 = 4\cdot 27+3$, el 3000-avo dígito es el tercer dígito del 28-avo entero positivo de 4-dígitos, esto es, el tercer dígito de 4027, es decir, el 2.

198 Presumiremos conocido el que los enteros naturales se pueden factorizar en factores primos de una manera única. Entonces pues, al expandir el producto

$$(1+2+2^2+\cdots+2^8)(1+3+3^2+\cdots+3^9)(1+5+5^2)$$

obtenemos todos los factores de $2^8 3^9 5^2$ y sólo factores de este número. Así pues, hay tantos factores como términos en el producto. Por lo tanto, hay $(1+8)(1+9)(1+3) = 320$ factores.

La suma de los divisores la obtenemos sumando las tres series geométricas anteriores:

$$\frac{2^9-1}{2-1}\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1} = 467689684.$$

En general, si $n = p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$, donde las p's son primos distintos y si $d(n), \sigma(n)$ denotan, el respectivamente, el número de divisores positivos de n y la suma de los divisores positivos de n, el razonamiento anterior nos dice que

$$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_s+1)$$

y

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_s^{a_s+1}-1}{p_s-1}.$$

199 Para escribir las primeras nueve páginas, se utilizaron nueve dígitos. Para escribir las $99-10+1 = 90$ páginas entre la 10 y 99 inclusas, se utilizaron $2\cdot 90 = 180$ dígitos. Hasta ahora hemos utilizado 189 dígitos. Si el libro llegase hasta la página 999, las $999-100+1 = 900$ páginas de tres dígitos utilizarían $3\cdot 900 = 2700$ dígitos, que es mucho más que la cantidad de dígitos prescrita. Así pues, el número de páginas es un número de tres dígitos. Nos quedan $1890-189 = 1701$ dígitos que usar, que nos dan para $1701/3 = 567$ páginas más. Así pues, contamos 567 páginas a partir de la 100. Esto quiere decir que el libro tiene 666 páginas.

201 800

270 3030

271 93

273 $\dfrac{5973}{1993}$

309 4

310 $a = -998 = b$

311 2400

312 9

313 1

315 384

316 580

318 Pista: $x^3 \pm 1 = (x\pm 1)(x^2 \mp x+1)$

320 Pista: Demuestre primero que $\csc 2x = \cot x - \cot 2x$.

321 Pista: Observe que
$$\frac{y}{1-y^2}=\frac{1}{1-y}-\frac{1}{1-y^2}.$$

325 Pista: De la identidad
$$\tan x-\tan y=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$
deduzca que
$$\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}.$$

326 Pista: De la identidad
$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}},$$
deduzca
$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}.$$
Haciendo $k=2,3,\ldots,n$, luego
$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-2.$$
Como $2\sqrt{2}<3$ y $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ se sigue que
$$2\sqrt{n}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1.$$
Poniendo $n=1000000$ se obtiene el resultado.

341 Pista: Poner $u_n=\cos v_n$.

344 Se tiene
$$(f(x))^2\cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=64x,$$
de donde
$$(f(x))^4\cdot\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^2=64^2x^2 \qquad (I)$$
Substituya x por $\frac{1-x}{1+x}$. Entonces
$$\left(f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)^2 f(x)=64\left(\frac{1-x}{1+x}\right). \qquad (II)$$
Divida (I) por (II),
$$f(x)^3=64x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$
de donde se destila el resultado.

363 Pista: $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$

371 Observe que
$$\sqrt{(x-1)x(x+1)(x+2)+1}=\sqrt{(x^2+x)(x^2+x-2)+1}=\sqrt{(x^2+x)^2-2(x^2+x)+1}=\sqrt{(x^2+x-1)^2}=x^2+x-1.$$
Así $\sqrt{30\cdot 31\cdot 32\cdot 33+1}=31^2+31-1=991.$

372 Se tiene
$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2 \implies x^2=2 \implies x=\sqrt{2},$$
ya que x es positivo.

373 Se tiene
$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\cdots}}}}=2 \implies \sqrt{x+2}=2 \implies x+2=4 \implies x=2.$$

377 Pista: Ponga $y=mx$ y divida las ecuaciones así obtenidas. Resuelva para m.

378 Pista: Escriba la ecuación como

$$(x^2-9x-1)^{10}-10x^9(x^2-9x-1)+9x^{10}=0.$$

384 Pista: Ponga $u=x+2, v=y+3$. Divida una ecuación por la otra.

385 Pista: Ponga $u=x+y, v=x-y$.

437 Es suficiente demostrar la desigualdad cuando a,b,c,d son todos estrictamente positivos. Póngase entonces $O=(0,0)$, $L=(a,b)$ y $M=(a+c,b+d)$. Por la desigualdad del triángulo en el plano, $OM \leq OL+LM$, ocurriendo igualdad si y sólo si los puntos son colineales. Pero entonces,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}=OM \leq OL+LM=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2},$$

e igualdad ocurre si y sólo si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

438 Como $aB<Ab$ se tiene $a(b+B)=ab+aB<ab+Ab=(a+A)b$ así, $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+A}{b+B}$. De manera semejante, $B(a+A)=aB+AB<Ab+AB=A(b+B)$ y así, $\dfrac{a+A}{b+B}<\dfrac{A}{B}$.

Por otra parte,

$$\frac{7}{10}<\frac{11}{15} \implies \frac{7}{10}<\frac{18}{25}<\frac{11}{15} \implies \frac{7}{10}<\frac{25}{35}<\frac{18}{25}<\frac{11}{15}.$$

Como $\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$, se tiene $q\leq 7$. ¿Podría ser q menor? Obsérvese que $\dfrac{5}{6}>\dfrac{11}{15}$ y que $\dfrac{4}{6}<\dfrac{7}{10}$. Así, considerando caso a caso con denominadores $q=1,2,3,4,5,6$, se ve que ninguna de estas fracciones yace en el intervalo deseado. Luego entonces el menor denominador es 7.

441 Obsérvese que para un entero k, $1<k<n$, $\quad k(n-k+1)=k(n-k)+k>1(n-k)+k=n$. Así,

$$n!^2=(1\cdot n)(2\cdot(n-1))(3\cdot(n-2))\cdots((n-1)\cdot 2)(n\cdot 1)>n\cdot n\cdot n\cdots n=n^n.$$

442 Sea

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{10000}$$

y

$$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{10000}{10001}.$$

Evidentemente, $x^2-1<x^2$ para todo real x. Esto implica que

$$\frac{x-1}{x}<\frac{x}{x+1}$$

en tanto cada uno de los cuatro factores sea positivo. Luego

$$\begin{array}{ccc}
1/2 & < & 2/3 \\
3/4 & < & 4/5 \\
5/6 & < & 6/7 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
9999/10000 & < & 10000/10001
\end{array}$$

Como todos los números involucrados son positivos, se multiplican ahora una y otra columna para obtener

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{10000}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{10000}{10001},$$

o sea, $A<B$. Esto da $A^2=A\cdot A<A\cdot B$. Ahora bien,

$$A\cdot B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{9999}{10000}\cdot\frac{10000}{10001}=\frac{1}{10001},$$

y en consecuencia $A^2<A\cdot B=1/10001$. Se deduce que $A<1/\sqrt{10001}<1/100$.

443 Para i fijo,

$$n \mid a_i \mid = \mid (n-1)\,a_i - (-a_i) \mid = \left| \sum_{i \neq j} a_i - a_j \right| \leq \sum_{i \neq j} \mid a_i - a_j \mid$$

Sumando sobre i, se tiene,

$$n \sum_{i=1}^{n} \mid a_i \mid \leq 2 \sum_{i<j} \mid a_i - a_j \mid,$$

de donde se destila el resultado.

Obsérvese que para $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = x$ y $a_n - (n-1)\,x$, se obtiene igualdad, por lo que $\dfrac{n}{2}$ no puede ser reemplazada por un valor mayor.

444 Póngase

$$T_m = \sum_{1 \leq k \leq m} a_k - \sum_{m<k \leq n} a_k.$$

Claramente, $T_0 = -T_n$. Como la sucesión $T_0, T_1, \ldots, T_n$ cambia de signo, elíjase un índice p tal que T_{p-1} y T_p tengan signos diferentes. O bien $T_{p-1} - T_p = 2|a_p|$, o bien $T_p - T_{p-1} = 2|a_p|$. Se asevera que

$$\min\left(T_{p-1} \ , \ T_p \right) = \leq \max_{1 \leq k \leq n} |a_k|\,.$$

Si de caso contrario se tuviese $T_{p-1} > \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$ y $T_p > \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$, entonces $2|a_p| = |T_{p-1} - T_p| > 2 \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$, contradicción.

460 De las igualdades dadas se deduce que

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k^2 - x_k)^2 = 0.$$

Como una suma de cuadrados es 0 si y sólo si cada término es 0, el resultado es inmediato.

461 De las igualdades dadas se deduce

$$\frac{1}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2 \right) = 0.$$

Como una suma de cuadrados es 0 si y sólo si cada término es 0, el resultado es inmediato.

462 Si por el contrario todas estas cantidades fuesen $> \dfrac{1}{4}$, entonces

$$a - b^2 - \frac{1}{4} + b - c^2 - \frac{1}{4} + c - d^2 - \frac{1}{4} + d - a^2 - \frac{1}{4} > 0 \implies \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 < 0,$$

contradicción, pues una suma de cuadrados reales no puede ser estrictamente negativa.

463 Se tiene

$$(r-s+t)^2 - t^2 = (r-s+t-t)(r-s+t+t) = (r-s)(r-s+2t).$$

Como $t - s \leq 0$, $r - s + 2t = r + s + 2(t-s) \leq r + s$ y así,

$$(r-s+t)^2 - t^2 \leq (r-s)(r+s) = r^2 - s^2$$

lo que resulta en

$$(r-s+t)^2 \leq r^2 - s^2 + t^2.$$

464 Si $a = b$, no hay nada que demostrar. Presúmase que $a \neq b$. Como

$$(b-a)^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2} \\ &= \frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}. \end{aligned}$$

Se nota ahora que $2\sqrt{a} \leq \sqrt{b} + \sqrt{a} \leq 2\sqrt{b}$ y por lo tanto

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leq \frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}$$

465 Notar que $3a^4 - 10a^2 + 9 = (a^2-1)^2 + 2(a^2-2)^2 > 0$.

466 Para $a \geq 0$, $b \geq 0$,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Las desigualdades deseadas se siguen ahora de las obvias

$$a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab} \leq a + b + a + b = 2(a+b).$$

467 Se tiene,

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3} \iff 3 \ \ a^2-ab+b^2 \ \ \geq a^2+ab+b^2 \iff a^2+b^2 \geq 2ab,$$

que es siempre cierta. Se tiene igualdad si y sólo si $a = b$.

468 Como el cuadrado de todo real es positivo

$$(a-1)^2 \geq 0 \implies a^2 + 1 \geq 2a.$$

De la misma manera,

$$b^2 + 1 \geq 2b, \qquad c^2 + 1 \geq 2c.$$

Multiplicando estas tres desigualdades,

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc,$$

como se quería demostrar.

469 Sean $x \geq 0$, $y \geq 0$ con $x + y = 100$. Entonces

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \implies \sqrt{xy} \leq 50 \implies xy \leq 2500,$$

de donde el máximo producto es 2500.

470 De la desigualdad de la media para tres números,

$$1 = \ \ \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \ \ ^{1/3} \leq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \implies 3 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},$$

demostrando la desigualdad deseada.

471 Usando la identidad

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

dos veces, se tiene,

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\
&= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)((a+b+c)^2 - 3ac - 3bc - 3ab) \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

Si a, b, c son positivos, entonces $a + b + c \geq 0$ y además como $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ por la desigualdad 6.6. De aquí se colige que

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc.$$

La desigualdad deseada se obtiene en poniendo $u = a^3, v = b^3, w = c^3$.

472 Como $x \mapsto x\operatorname{sen} x$ es estrictamente positiva en dicho intervalo,

$$\frac{9x^2\operatorname{sen}^2 x+4}{x\operatorname{sen} x}=9x\operatorname{sen} x+\frac{4}{x\operatorname{sen} x}\geq 2\sqrt{(9x\operatorname{sen} x)\left(\frac{4}{x\operatorname{sen} x}\right)}=2\sqrt{9\cdot 4}=12.$$

Luego el valor mínimo es 12, que se obtiene cuando

$$9x\operatorname{sen} x=\frac{4}{x\operatorname{sen} x}\implies x^2\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{36}\implies x\operatorname{sen} x=\frac{1}{6}.$$

473 Ver que $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$. Así,

$$a(1-b)b(1-c)c(1-d)d(1-a)\leq\frac{1}{4^4}.$$

Si todos los productos fuesen $>\frac{1}{4}$ entonces

$$a(1-b)b(1-c)c(1-d)d(1-a)>\frac{1}{4^4},$$

contradicción.

474 Se tiene

$$0\leq\left(x-\sqrt{y^2+1}\right)^2+\left(y-\sqrt{x^2+1}\right)^2$$

de donde

$$x^2+y^2+1\geq x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$$

Habrá igualdad si y sólo si $\begin{array}{l} x=\sqrt{y^2+1} \\ y=\sqrt{x^2+1}\end{array}$, de donde $x^2+y^2=x^2+y^2+2$, pero como esto es imposible, habrá siempre desigualdad.

475 Por el ejemplo 453, se tiene

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc.$$

Además,

$$a\geq\sqrt{a^2-(b-c)^2}=\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}.$$

De la misma manera,

$$b\geq\sqrt{b+a-c}\sqrt{b+c-a},\qquad c\geq\sqrt{c+a-b}\sqrt{c+b-a}.$$

Así pues

$$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

de donde se deduce el resultado.

476 La desigualdad propuesta es equivalente a

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2\geq 0,$$

que es trivial.

Obsérvese que igualdad ocurre si y sólo si $x=y=z$.

477 La igualdad siniestra equivale a

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\geq 0,$$

esto es,

$$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geq 0.$$

De aquí se obtiene el resultado, con igualdad si y sólo si $a=b=c$. Nótese que esta igualdad es válida cualesquiera sean los valores estrictamente positivos a,b,c.

Para la desigualdad diestra, como a,b,c son las longitudes de los lados de un triángulo,

$$|a-b|<c,\quad |b-c|<a,\quad |c-a|<b.$$

Entonces

$$4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2=c^2-(a-b)^2+a^2-(b-c)^2+b^2-(c-a)^2>0.$$

478 Póngase $x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b$. Entonces $x > 0, y > 0, z > 0$ y

$$a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{y+x}{2}, c = \frac{z+y}{2}.$$

Nótese que

$$2(x+y) \geq x+y+2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2,$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si $x = y$. Luego,

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{b}.$$

De la misma manera

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}, \qquad \sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c} \leq 2\sqrt{a}.$$

Sumando se obtiene la desigualdad deseada. La igualdad se cumple si y sólo si

$$x = y = z, \iff a = b = c.$$

479 Póngase $a = x+y, b = y+z, c = z+x$. Entonces $a > 0, b > 0, c > 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y} &= \frac{(a-b)c}{b}+\frac{(b-c)a}{c}+\frac{(c-a)b}{a} \\ &= \frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\right) = a\frac{b^2+c^2}{2bc} \geq a$$

con igualdad si y sólo si $b = c$. De la misma manera

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right) \geq c, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}\right) \geq b.$$

Sumando se obtiene

$$\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c \geq 0,$$

de donde se obtiene el resultado. Hay igualdad si y sólo si $a = b = c$, esto es, si $x = y = z$.

480 Supóngase primero que cada factor siniestro es positivo. Se tiene,

$$b-1+\frac{1}{c} = b\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right) = b\left(1+a-\frac{1}{b}\right).$$

En consecuencia,

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right) = b\left(a^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right) \leq ba^2.$$

Procediendo de igual manera con los otros factores se deduce que

$$\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq cb^2, \qquad \left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right) \leq ac^2.$$

De aquí

$$\left(\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right)^2 \leq (abc)^2 = 1,$$

obteniendo la desigualdad deseada.

Ahora bien, si por ejemplo, $a-1+\frac{1}{b} < 0$, entonces $a < 1$ y $b > 1$. Bajo estas condiciones $b-1+\frac{1}{c} > 0$ y $c-1+\frac{1}{a} > 0$, esto es, sólo uno de los factores es negativo, de donde nuevamente se obtiene la conclusión.

481 Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $a \leq b \leq c$. Es suficiente entonces demostrar que $a+b > c$.

Ahora bien,

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 > 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

si y sólo si

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0.$$

Ya que tres de los factores son positivos, también lo habrá de ser el cuarto, de donde se llega a la conclusión.

491 Aplicando la desigualdad de las medias a $1, 2, \ldots, n$:

$$n!^{1/n} = (1 \cdot 2 \cdots n)^{1/n} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

habiendo desigualdad estricta cuando $n > 1$.

492 Por la de sigualdad de las medias,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd &\geq 10\left(a^2b^2c^2d^2abacadbcbdcd\right)^{\frac{1}{10}} \\ &= 10\left(a^5b^5c^5d^5\right)^{\frac{1}{10}} \\ &= 10, \end{aligned}$$

logrando igualdad cuando $a = b = c = d = 1$.

493 Por usando las desigualdades de las medias aritmética y geométrica y las medias armónica y geométrica,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

y

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}.$$

Multiplicando se obtiene la desigualdad deseada.

494 Se tiene

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+6abc+3\left(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\right) &\geq a^3+b^3+c^3+6abc+3\times 6\left(a^6b^6c^6\right)^{\frac{1}{6}} \\ &= a^3+b^3+c^3+24abc. \end{aligned}$$

495 Por la desigualdad de las medias,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} a_k(1-a_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n}(1-a_k) &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)^n \\ &\leq \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}. \end{aligned}$$

496 Se tiene

$$\begin{aligned} a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} &= \left(b+\frac{1}{2a}\right)^2 + a^2 + \frac{3}{4a^2} \\ &\geq a^2 + \frac{3}{4a^2}, \end{aligned}$$

habiendo igualdad si y sólo si $b = -\dfrac{1}{2a}$. Pero por la desigualdad de las medias,

$$a^2 + \frac{3}{4a^2} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

con igualdad si y sólo si $a^4 = \dfrac{3}{4}$ y $b = -\dfrac{1}{2a}$.

497 Para toda i,

$$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3(a_i)^{\frac{1}{3}}.$$

Así,

$$\prod_{i=1}^{n}(2+a_i) \geq 3^n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}} = 3^n.$$

498 Se consideran los índices módulo n. Para enteros k, j, se toma $\alpha_{k,j} = \dfrac{x_{j+k}}{x_j}$. Entonces para todo k,

$$\prod_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} = 1.$$

Así,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{s - x_j}{x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k,j} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_j \alpha_{k,j} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} n \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

499 Póngase

$$P = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Entonces

$$P = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz}.$$

Por la desigualdad de las medias,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \frac{1}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}.$$

Además,

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3 \left(\frac{1}{(xyz)^{\frac{1}{3}}} \right)^2.$$

Se concluye que $P \geq 1 + 3\left(\frac{1}{(xyz)^{1/3}}\right) + 3\left(\frac{1}{(xyz)^{1/3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{(xyz)^{1/3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{(xyz)^{1/3}}\right)^3$. Pero por la desiguadad de las medias

$$\frac{1}{(xyz)^{1/3}} \geq \frac{3}{x+y+z} = 3$$

y se deriva que $P \geq 4^3 = 64$, con igualdad si y sólo si $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

500 Se pone

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$$

y $a_i = x_i^3$ para toda i. Luego $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. y usando el problema 467,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i^3 + a_j^3}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left((a_i + a_j) \frac{a_i^2 - a_i a_j + a_j^2}{a_i^2 + a_i a_j + a_j^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \\ &= \frac{n-1}{3} \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\geq \frac{n(n-1)}{3} (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{n(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Así,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \frac{n(n-1)}{3},$$

con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

501 Póngase

$$f(a,b,c,d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd = bc(a+d) + ad\left(b + c - \frac{176}{27}bc\right).$$

Obsérvese que $f(a,b,c,d)$ es simétrica.

Presúmase primero que $b + c - \frac{176}{27}bc \leq 0$. Entonces,

$$f(a,b,c,d) \leq bc(a+d) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

asegurando el resultado en este caso.

Presúmase ahora que $b + c - \frac{176}{27}bc > 0$.. Entonces

$$f(a,b,c,d) \leq bc(a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2\left(b + c - \frac{176}{27}bc\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right).$$

Iterando,

$$f(a,b,c,d) \leq f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right) = f\left(b, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, c\right)$$

ya que f es simétrica. Esto es

$$\leq f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{a+d}{2}\right) \leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27},$$

lo que resulta en la desigualdad.

508 Usando CBS en $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)c_k$ una vez, se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2}.$$

Usando CBS de nuevo $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2\right)^{1/2}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right)^{1/4}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4\right)^{1/4}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

lo que resulta en la desigualdad deseada.

509 Por CBS,

$$(1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \cdots + 1 \cdot x_n)^2 \leq \left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right),$$

de donde se obtiene el resultado.

510 El caso $n = 3$ ya se ha visto en el problema 481. Supóngase ahora que $n \geq 4$. Por simetría, es suficiente demostrar que a_1, a_2, a_3 son las longitudes de los lados de un triángulo. Por la desigualdad de CBS,

$$\begin{aligned}
(n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4\right) &< \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \\
&= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \sum_{k=4}^{n} a_k^4\right)^2 \\
&\leq (n-1)\left(\frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2}{4} + \frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2}{4} + \sum_{k=4}^{n} a_k^4\right).
\end{aligned}$$

De aquí,

$$2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right) < \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2,$$

obteniendo el resultado.

511 Sin pérdida de generalidad presúmase que $a^2+b^2=1$. Entonces $c^2+d^2=1$. Así,

$$\left(\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\right)(ac+bd) \geq \left(c^2+d^2\right)^2 = 1.$$

Ahora bien,

$$ac+bd \leq \frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) = 1.$$

Esto quiere decir que

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b} \geq \frac{1}{ac+bd} \geq 1.$$

512 De CBS se obtiene

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leq \sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}$$

Ahora bien,

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z} = 3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1,$$

de donde se deduce la conclusión.

Habrá igualdad si y sólo si

$$\frac{x-1}{x^2} = \frac{y-1}{y^2} = \frac{z-1}{z^2}, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2,$$

esto es, si $x=y=z=\frac{3}{2}$.

513 Póngase $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$. La restricción $xyz \geq xy+yz+zx$, es equivalente a $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1$. De aquí, $a+b+c \leq 1$. Por otra parte,

$$xyz \geq 3(x+y+z) \iff ab+bc+ca \leq 1.$$

Ahora bien,

$$1 \geq (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$$

Gracias a CBS, se tiene

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2},$$

lo que quiere decir que

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Así pues,

$$1 \geq 3(ab+bc+ca),$$

llegando a la conclusión.

514 Por CBS se tiene

$$S_2-a_i^2 \geq \frac{1}{n-1}(S_1-a_i)^2.$$

Se sigue que

$$\frac{S_2-a_i^2}{S_1-a_i} \geq \frac{1}{n-1}(S_1-a_i)$$

y entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_2-a_k^2}{S_1-a_k} \geq \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(S_1-a_k) = S_1.$$

525 Por la desigualdad del reordenamiento,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{\breve{a}_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

ya que $\breve{a}_k \geq k$ y las a's siendo enteros distintos estrictamente positivos.

526 Póngase

$$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}, \qquad x=b+c+d, \quad y=c+d+a, \quad z=d+a+b, t=a+b+c.$$

Por simetría y sin pérdida de generalidad se puede presumir que $a\geq b\geq c\geq d$. Entonces

$$a^n\geq b^n\geq c^n\geq d^n$$

para un entero $n>0$ y

$$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}\geq\frac{1}{t}.$$

Ahora bien, por la desigualdad del reordenamiento,

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da=1$$

y por la desigualdad de Chebyshev

$$S\geq\frac{1}{4}\quad a^3+b^3+c^3+d^3\quad\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right).$$

Usando otra vez Chebyshev,

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq\frac{1}{4}\quad a^2+b^2+c^2+d^2\quad(a+b+c+d).$$

De $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 1$ y $3(a+b+c+d)=x+y+z+t$ se concluye,

$$S\geq\frac{1}{48}(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{16}{48}=\frac{1}{3}.$$

527 La desigualdad deseada es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\leq\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

que se sigue inmediatamente de la desigualdad de reordenamiento.

528 Póngase $a_{n+1}=a_1$. De la desigualdad de reordenamiento se tiene,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

dando la conclusión.

529 Por simetría se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $a\geq b\geq c$. Entonces $a^n\geq b^n\geq c^n$ y $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$. Por la desigualdad de reordenamiento

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}$$

y

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{c+a}+\frac{b^n}{a+b}+\frac{c^n}{b+c}.$$

En resumen,

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right).$$

Por la desigualdad de Chebyshev,

$$a^n+b^n\geq\frac{1}{2}\quad a^{n-1}+b^{n-1}\quad(a+b),$$

de donde

$$\frac{a^n+b^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}\quad a^{n-1}+b^{n-1}\quad.$$

De igual manera,

$$\frac{b^n+c^n}{b+c}\geq\frac{1}{2}\quad b^{n-1}+c^{n-1}$$

y

$$\frac{c^n+a^n}{c+a} \geq \frac{1}{2}\left(c^{n-1}+a^{n-1}\right)$$

y así,

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

530 Por simetría se puede suponer, sin pérdida de generalidad que (x_i) la sucesión es creciente. Entonces también lo será $(\ln x_i)$. Por la desigualdad de Chebyshev

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right),$$

o lo que es lo mismo,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}.$$

531 Por simetría se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $x \leq y \leq z$. Entonces

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)} \leq \frac{1}{(1+z)(1+x)} \leq \frac{1}{(1+x)(1+y)}.$$

Por la desigualdad de Chebyshev,

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} &\geq \frac{x^3+y^3+z^3}{3}\left[\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+z)(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right] \\ &= \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \times \frac{3+x+y+z}{(1+y)(1+z)(1+x)}\end{aligned}$$

Póngase $\frac{x+y+z}{3} = a$. Luego por la desigualdad de las medias,

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq a^3, \quad 3a = x+y+z \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}} = 3, \quad (1+y)(1+z)(1+x) \leq \left(\frac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3}\right)^3 = (1+a)^3.$$

Así,

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq a^3 \times \frac{6}{(1+a)^3}.$$

Luego pues, es suficiente demostrar que

$$\frac{6a^3}{(1+a)^3} \geq \frac{3}{4}.$$

Ya que $a \geq 1$ y como $\frac{6a^3}{(1+a)^3} = 6\left(1-\frac{1}{1+a}\right)^3$, el percatarse de que $a \mapsto 6\left(1-\frac{1}{1+a}\right)^3$ es estrictamente creciente sobre el intervalo $]0;+\infty[$, asegura la conclusión.

602 Mídanse los ángulos en sentido dextrógiro, siendo el origen (0°), a las $12:00$. Cada minuto corrido por el minutero cuenta $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$, y así, de hora a hora, las manecillas viajan $5(6^\circ) = 30^\circ$. Cuando el minutero está en el 8, éste ha viajado $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ de la circunferencia, esto es,

$$\frac{2}{3}360^\circ = 240^\circ$$

y el horario se ha movido $\frac{2}{3}$ del camino desde el 4 al 5, habiendo viajado

$$\left(4+\frac{2}{3}\right)(30^\circ) = 140^\circ.$$

Luego, el ángulo entre una y otra manecilla es $240^\circ - 140^\circ = 100^\circ$.

603 La suma de los ángulos internos de un pentágono es $3\times 180^\circ = 540^\circ$. Cada uno de los ángulos internos mide pues $540^\circ \div 5 = 108^\circ$. Así $\widehat{AEF} = 360^\circ - \widehat{AED} - \widehat{EDF} = 360^\circ - 108^\circ - 90^\circ = 162^\circ$. Como $\triangle AEF$ es isósceles, se desprende que $\widehat{EAF} = \dfrac{180^\circ - 162^\circ}{2} = 9^\circ$.

604 De la figura A.4 se percata que $\widehat{ADH} = \widehat{ACT}$ y que $\triangle THC$ es rectángulo isósceles. Luego $\widehat{ADH} + \widehat{ACH} = 45^\circ$.

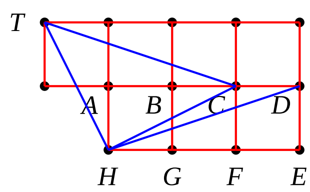


Figure A.4: Problema 604.

605 Sea n el número de lados requerido. Cada ángulo exterior mide $\dfrac{360^\circ}{n}$. El ángulo exterior debe ser lo suficientemente pequeño para que cuando la figura rote 40° o 60°, se obtenga una figura homóloga. Esto se satisfará cuando $\dfrac{360^\circ}{n}$ divida al máximo común divisor de 40° y 60°, que es 20°. Como $\dfrac{360^\circ}{n} = 20^\circ$ tiene la solución $n = 18$, éste es el mínimo requerido.

611 Se tiene

$$\begin{aligned} AB &= AD + DB \\ &= AE + DB \\ &= AC - EC + DB \\ &= AC - CF + DB \\ &= AC - (BC - FB) + DB \\ &= AB - BC + DB + DB \\ &= AB - BC + 2DB, \end{aligned}$$

de donde, en resolviendo para DB, se obtiene el resultado.

612 Las tangentes a un círculo desde un punto son congruentes. Así, $AC = 20 + r$ y $CB = 6 + r$. La igualdad de áreas revela que

$$\frac{1}{2}(20+r)(6+r) = r^2 + 2\ \ \frac{1}{2}(20)(r) \ \ + 2\ \ \frac{1}{2}(6)(r) \quad \Longrightarrow\ 120 - 26r - r^2 = 0 \Longrightarrow\ (30+r)(4-r) = 0.$$

Como $r > 0$ se tiene $r = 4$.

613 $\dfrac{\pi}{7}$

614 Extiéndanse los lados del hexágono, como en la figura A.5. Como los ángulos del hexágono son 120° cada uno, el $\triangle XYZ$ es equilátero. Luego

$$ZA + AF + FX = XE + ED + DY,$$

y en restando los lados de los triángulos menores,

$$AB + AF + EF = EF + DE + CD \Longrightarrow AB - DE = CD - FA,$$

dando una de las igualdades. La otra se obtiene de manera semejante.

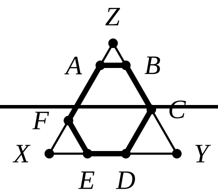


Figure A.5: Problema 614.

636 Como $\triangle BAM$ es isósceles, $\widehat{MBA} = \widehat{MAB}$. De la misma manera, $\triangle MAC$ es isósceles y $\widehat{MCA} = \widehat{MAC}$. Así pues

$$\widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = BAC.$$

Pero como la suma de los ángulos internos del $\triangle ABC$ es

$$BAC + \widehat{MBA} + \widehat{MCA} = \pi,$$

se deduce $BAC = \dfrac{\pi}{2}$.

637 Obsérvese primero que por el teorema de Pitágoras, la longitud de cualquier cateto es menor que la longitud de la hipotenusa. Luego

$$AH_A < AB, \quad BH_B < BC, \quad CH_C < CA \implies AH_A + BH_B + CH_C < AB + BC + CA,$$

dando el resultado.

639 El $\triangle AHC$ es rectángulo en H. $[AH]$, $[AM]$, $[MC]$ son todos congruentes (en efecto, radios del circuncírculo del $\triangle AHC$) y por lo tanto $\widehat{MHC} = 30^\circ$.

659 En la figura A.6, $BO = CO$, $OM_C = OM_B$, gracias al teorema 653 y $\widehat{BOM_C} = \widehat{COM_B}$. Por lo tanto, $\triangle BOE \cong \triangle COD$. Así $BM_C = CD$ y $AB = AC$.

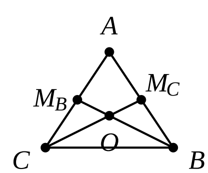


Figure A.6: Problema 659.

669 Póngase $AB = a$, $MN = x$ y $CD = b$. Sea $h = h_1 + h_2$ la altura del trapecio, siendo h_1 la altura del trapecio $ABNM$ y h_2 la altura del trapecio $MNCD$. Entonces

$$\frac{a+b}{2(a+x)} = \frac{h_1}{h}, \qquad \frac{a+b}{2(b+x)} = \frac{h_2}{h} \implies \frac{a+b}{2(a+x)} = 1 - \frac{a+b}{2(b+x)} \implies x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

670 $6\sqrt{3} - 2\pi$.

673 7.

674 Sean D, E, F, los pies de las perpendiculares a los lados $[BC]$, $[CA]$ y $[AB]$ respectivamente. Entonces $PF = a, PE = 2a, PF = 3a$, y

$$[ABC] = [APB] + [APC] + [CPA].$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3^2 - \frac{3}{2}^{\,2}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3a + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2a,$$

dando$a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

675 Supóngase que c_1 tiene lado c. Entonces se ve que c_2 tiene lado $c+1$, c_3 tiene lado $c+2$ y c_4 tiene lado $c+3$. De aquí se sigue que c_5 tiene lado 4. Continuando este proceso se deduce que c_6 tiene lado $2c+1$. El largo del rectángulo es pues

$$(2c+1)+(c+1)+(c+2)=4c+4.$$

El cuadrado c_7 tiene lado

$$c+3+4=c+7.$$

El ancho del rectángulo es pues

$$(c+7)+(c+3)+(c+2)=3c+12.$$

El cuadrado c_8 tiene lado

$$c+7+4=c+11.$$

Finalmente, dos lados opuestos del rectángulo tienen dimensiones $4c+4$ y

$$(c+7)+(c+11)=2c+18.$$

Como han de ser iguales se deduce que $4c+4=2c+18 \implies c=7$. Conclusión: el rectángulo tiene área $33\times 32=1056$.

677 Sea O el centro del círculo. Obsérvese que

$$[ABCA'B'C']=2[\triangle AOB]+2[\triangle BOC]+2[\triangle COA'].$$

Se tiene

$$[\triangle AOB]=[\triangle B'OA],\quad [\triangle BOC]=[\triangle COB'],\quad [\triangle COA']=[\triangle AOC].$$

Así,

$$[ABCA'B'C']=2([\triangle B'OA]+[\triangle COB']+[\triangle AOC])=2[\triangle ACB']=2.$$

678 Se A el área del circulo exterior. La información dada estipula que las cuerdas dividen a A en dos regiones: una de área $\dfrac{A}{4}$ y otra de $\dfrac{3A}{4}$. Divídase el área A del círculo exterior en nueve regiones: cuatro rincones como el área sombreada que se denominará $4P$, cuatro entre los rincones, que se denominará $4Q$ y el cuadrado, que se denominará S. Así

$$A=4P+4Q+S.$$

Las cuerdas dividen ahora al círculo mayor en tres bandas, dos de área $2P+Q$ y una de área $2Q+S$. El área de la banda central y una de las bandas exteriores se pueden ahora expresar como

$$2Q+S=\frac{A}{2},\qquad 2P+Q=\frac{A}{4}.$$

Luego

$$2Q+S=2(2P+Q) \implies S=4P.$$

Si x es el lado del cuadrado central entonces $P=\dfrac{S}{4}=\dfrac{x^2}{4}$. El área del círculo interior es $I=\dfrac{\pi x^2}{2}$. Se colige que

$$\frac{P}{I}=\frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{\pi x^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}.$$

679 Sea y en la figura adjunta, el área de la región amarilla, r el área de la región roja y b el área de la región azul. Se quiere $r+b$. Ahora bien,

$$r+b+2y=\frac{\pi R^2}{4},\qquad y+b=\frac{\pi(R/2)^2}{2}=\frac{\pi R^2}{8}.$$

La última igualdad resulta en

$$2y=\frac{\pi R^2}{4}-2b,$$

y substitutyendo,

$$r+b=\frac{\pi R^2}{4}-2y=2b,$$

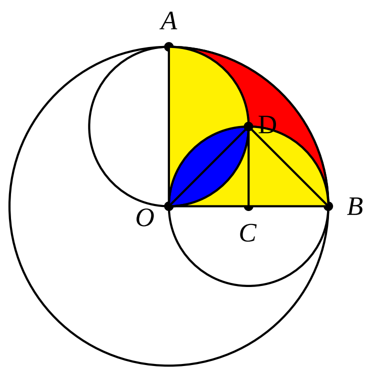
de donde $r=b$.

Se desea ahora hallar el área de la región azul. Para lograr esto, obsérvese que $\triangle OCD$ es rectángulo en C. La mitad del área de la porción azul se puede hallar en substrayendo del área OCD el área del $\triangle OCD$:

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{4}\cdot\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2} \implies b = \frac{R^2(\pi-2)}{8}.$$

El área buscada es entonces

$$b + r = 2b = \frac{(\pi-2)R^2}{4}.$$



684 Únanse los centros A y C como en la figura 7.101. El punto B, directamente abajo del punto A, es la intersección de las de rectas paralelas a los lados del cuadrado que pasan por A y C. Como $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ y $ACB = \frac{\pi}{4}$, $\triangle ABC$ es isósceles. Evidentemente, $AC = 2+r$, $AB = 2-r$, $BC = 2-r$. Por el teorema de Pitágoras,

$$(2-r)^2 + (2-r)^2 = (2+r)^2.$$

Esto simplifica a

$$r^2 - 12r + 4 = 0,$$

de donde $r = 6 - 4\sqrt{2}$, escogiendo la raíz menor que 2. Se puede también obtener a r observando que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{2-r}{2+r}.$$

685 Sea $[AD]$ tangente al círculo P en E. Entonces $DE = DB$ y

$$AE^2 = AP^2 - PE^2 = 36 - 4 = 32 \implies AE = 4\sqrt{2}.$$

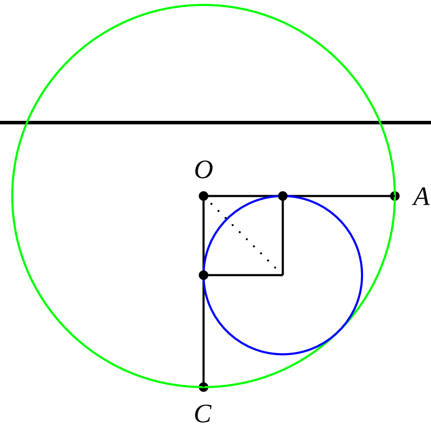
Además,

$$AD^2 = BD^2 - AB^2 \implies (AE+BD)^2 = 64 + BD^2 \implies (4\sqrt{2}+BD)^2 = 64 + BD^2,$$

que a su vez

$$\implies 32 + 8BD\sqrt{2} + BD^2 = 64 + BD^2 \implies BD = 2\sqrt{2}.$$

686 Sean R y $r$los radios del círculo externo e interno, respectivamente. El área buscada es $\pi(R^2 - r^2)$. Por el Teorema de Pitágoras, $R^2 - r^2 = (\frac{20}{2})^2 = 100$. El área deseada es pues 100π.



687 Únase los centros de ambos círculos, como en la figura. Obsérvese que $R = a + 2r$, en donde r es el radio del círculo menor y a es la medida del segmento de recta fuera del círculo menor desde el centro del círculo mayor. Trácense dos radios del círculo menor, paralelos a los dos radios del círculo mayor, obteniendo un cuadrado de lado r. En utilizando el teorema de Pitágoras,

$$r^2 + r^2 = (a + r)^2 \implies a = (\sqrt{2} - 1)r,$$

ya que $a > 0$. Finalmente,

$$R = a + 2r = (\sqrt{2} - 1 + 2)r \implies r = \frac{R}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)R.$$

710 Trace $[KL] \parallel [AB]$ entre $[KL]$ y $[EF]$. Use el teorema 652. Resulta que $EF = 9$.

711 Gracias a la fórmula de Herón, $[\triangle ABC] = 84$. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y por lo tanto $[\triangle A'B'C'] = 84k^2$ donde k es la constante de semejanza. El área del $\triangle A'B'C'$ también puede obtenerse al substraer él área de los tres trapezoides de altura 2 formados al unir los vértices correspondientes de los triángulos. Así pues

$$84k^2 = 84 - 41(k + 1) \implies k = \frac{1}{2},$$

al descartarse una raíz extraña. El área buscada es entonces $\dfrac{84}{4} = 21$.

712 Véase la figura A.7. Como $[AD]$ es la bisectriz angular de A, se tiene por el teorema de la bisectriz,

$$\frac{CD}{DB} = \frac{8}{11}.$$

Sea $CD = 8a$ y $DB = 11a$ para alguna constante a. Como $CM = MB$, se tiene $CM = 9.5a$. Ahora bien, $DM = 1.5a$. Como $DM = 1$ se tiene $a = \dfrac{2}{3}$. Luego $CD = \dfrac{16}{3}$ y $DB = \dfrac{22}{3}$. Sea $x = HD$. Luego

$$8^2 - (\frac{16}{3} - x)^2 = AH_A^2 = 11^2 - (\frac{22}{3} + x)^2 \implies H_AM_A = 1 + x = 2.25.$$

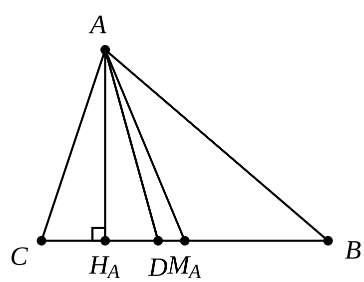
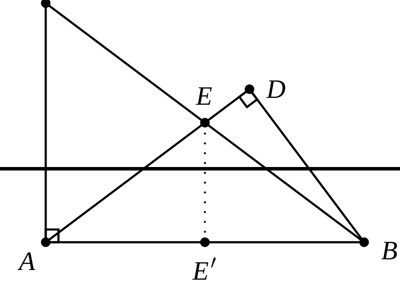


Figure A.7: Problema 712.



713 Sea E' la proyección perpendicular de E sobre el segmento $[AB]$. Por Pitágoras,

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 20.$$

Since

$$\frac{BD}{AD} = \frac{3}{4} = \frac{AC}{AB},$$

$\triangle ABC \sim \triangle DAB$. Así, $\widehat{BAE} = \widehat{ABE}$ y por lo tanto $AE = EB$. Se sigue que $\triangle ABE$ es isósceles en E. Como EE' es la altura a la base de 20 de un triángulo isósceles, $AE' = E'B = 10$. Por otro lado, $\triangle AE'E \sim \triangle BAC$ y por lo tanto

$$\frac{EE'}{AC} = \frac{AE'}{AB} = \frac{1}{2} \implies EE' = \frac{15}{2}.$$

Para completar,

$$[\triangle AEB] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EE' = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{15}{2} = 75.$$

714 Póngase

$$K_A = [BCO] \qquad K_B = [CAO] \qquad K_C = [ABO].$$

Entonces

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{[ABO]}{[BOA']} = \frac{[CAO]}{[OA'C]} = \frac{[ABO]+[CAO]}{[BOA']+[OA'C]} = \frac{K_B + K_C}{K_A}.$$

De manera semejante se puede demostrar que

$$\frac{BO}{OB'} = \frac{K_A + K_C}{K_B} \qquad \frac{CO}{OC'} = \frac{K_A + K_B}{K_C}.$$

Se deduce que

$$92 = \frac{K_B + K_C}{K_A} + \frac{K_A + K_C}{K_B} + \frac{K_A + K_B}{K_C} \implies K_A^2 K_B + K_A^2 K_C + K_B^2 K_A + K_B^2 K_C + K_C^2 K_A + K_C^2 K_B = 92 K_A K_B K_C.$$

Así

$$\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{BO}{OB'} \cdot \frac{CO}{OC'} = \frac{K_B + K_C}{K_A} \cdot \frac{K_A + K_C}{K_B} \cdot \frac{K_A + K_B}{K_C} = \frac{K_A^2 K_B + K_A^2 K_C + K_B^2 K_A + K_B^2 K_C + K_C^2 K_A + K_C^2 K_B + 2K_A K_B K_C}{K_A K_B K_C} = 94.$$

715 En la figura 7.122, $\widehat{BEF} = \widehat{CED}$, ya que son opuestos por el vértice. También $\widehat{BDC} = \widehat{BFC}$, ya que subtienden el mismo arco. Así $\triangle EFB \sim EDC$. Luego

$$\frac{FE}{ED} = \frac{EB}{EC}$$

o

$$\frac{FE}{3} = \frac{5}{1},$$

de donde $FE = 15$. Si r es el radio del círculo entonces $2r = FC = FE + EC = 16$, de donde $r = 8$.

716 Sea M el punto medio de BD. Del ejemplo 854, MP y MS son iguales y perpendiculares, y también MQ y MR son iguales y perpendiculares. Un giro de 90° toma al $\triangle PMR$ al $\triangle QMS$. Por lo tanto, PR y QS son iguales y perpendiculares.

717 Sea A el área de uno de los triángulos rectángulos de los rincones (con hipotenusa 3). El área buscada es $25 - 4A$. Ahora, cada uno de estos pequeños triángulos es semejante a los triángulos rectángulos mayores (de catetos 5 y 3). Como la hipotenusa de estos triángulos está en proporción, $3k = \sqrt{34}$, para alguna constante k. Luego, $Ak^2 = \frac{15}{2}$. Esto resulta en $A = \frac{15}{2k^2} = \frac{135}{68}$. Finalmente $25 - 4A = 25 - \frac{135}{17} = \frac{290}{17}$.

718 5 : 1

719 Sea b el número de unidades cuadradas pintadas en azul y y el número en amarillo. De triángulos semjantes,

$$\frac{b}{252} = \frac{120+90+b}{252+105+y}$$

y

$$\frac{y}{105} = \frac{252+y+b}{120+105+90}.$$

Luego $y = 210, b = 168$.

720 Sea $x = AC$. Entonces $x + 3x + 3x = 84 \implies x = 12$. De aquí $FC = \frac{AC}{2} = 6$ y $FG = 3$. Además $DC = \frac{BC}{2} = 18$. Se deduce que el perímetro buscado es 39.

721 Tómese K sobre $\overleftrightarrow{FG}$ tal que $[DK] \parallel [EF]$. Ya que $\triangle GDK \sim \triangle GBF$, se sigue que

$$\frac{DK}{BF} = \frac{DG}{BG} \implies DK = \frac{9y}{5}.$$

Como $\triangle HFE \sim \triangle HKD$, se sigue que

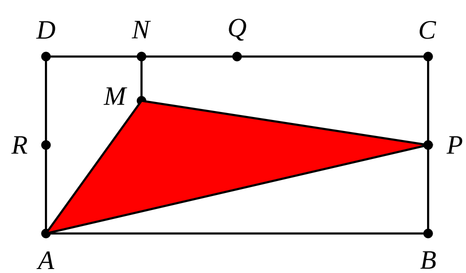
$$\frac{DH}{HE} = \frac{DK}{EF} = \frac{DK}{2y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{DK}{3y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3x}{5x} = \frac{9}{10}.$$

La razón requerida es $\frac{9}{10}$.

722 Sea N el punto medio del segmento $[PQ]$. Por triángulos semejantes, $RD = 2MN$, de donde se infiere que $MN = \frac{DA}{4}$ y $DN = \frac{CD}{4}$. Obsérvese que $a = (AD)(DC) = (AB)(BC)$ y que

$$\begin{aligned}
[ABCD] &= [AMND] + [\triangle APM] + [CPMN] + [\triangle APB] \\
&= \frac{DA+MN}{2} \quad DN + b + \frac{CP+MN}{2} \quad NC + \frac{AB \times PB}{2} \\
&= \frac{5DA}{8} \quad \frac{CD}{4} + b + \frac{3CB}{8} \quad \frac{3CD}{4} + \frac{AB \times BC}{4} \\
&= \frac{5a}{32} + b + \frac{9a}{32} + \frac{a}{4} \\
&= \frac{22a}{32} + b
\end{aligned}$$

Así, $\frac{a}{b} = \frac{16}{5}$.



740 Sean los dos puntos A y B y la recta $\overleftrightarrow{L}$. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{L}$, constrúyase la mediatriz de $[AB]$. Esta intersecará a $\overleftrightarrow{L}$ en algún punto, dígase P, y a $[AB]$ en su punto medio, llámese Q. Sea O el punto medio de $[PQ]$. El círculo de centro O y radio OP cumple las condiciones deseadas.

Si $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{L}$ entonces las dos rectas se intersecarán en un punto, llámese T. Se tiene que localizar el punto de tangencia P del círculo con la recta. Para esto, obsérvese que P debe satisfacer

$$TP^2 = TA \cdot TB,$$

luego P se construye con el proceso usado para construir la media proporcional, conocidos T, A, B. Observe que hay dos posibilidades para P. Eríjase ahora la perpendicular $\overleftrightarrow{\ell_1}$ a $\overleftrightarrow{L}$ desde P y la mediatriz $\overleftrightarrow{\ell_2}$ del $[AB]$. El centro del círculo buscado es $O = \overleftrightarrow{\ell_1} \cap \overleftrightarrow{\ell_2}$.

757 Sean P y P' las proyecciones perpendiculares del centro del círculo superior sobre los segmentos $[AB]$ y $[AC]$ respectivamente. Sean Q y Q' las proyecciones perpendiculares del centro del círculo superior sobre los segmentos $[AC]$ y $[BC]$ respectivamente. Obsérvese que

$$AP = AP', \qquad CQ = CQ', \qquad AP' + 2R + CQ = 5.$$

Póngase $AP = AP' = x$ y $CQ = CQ' = y$. En considerando triángulos rectángulos apropiados se obtiene

$$\frac{x}{R} = \cot\frac{A}{2}, \qquad \frac{y}{R} = \cot\frac{C}{2}.$$

Luego,

$$x + 2R + y = 5 \implies R\cot\frac{A}{2} + 2R + R\cot\frac{C}{2} = 5 \implies R = \frac{5}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} + 2}.$$

Además,

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\cos A}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\cos A}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}} = 3.$$

De la misma guisa,

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\cos C}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\cos C}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{10}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}} = 2.$$

De aquí, $R = \dfrac{5}{2+3+2} = \dfrac{5}{7}$.

Aliter: Tengan los círculos centros O y O' como en la figura adjunta. Sea S la proyección perpendicular de O' sobre $[AB]$ y sea T la proyección perpendicular de O sobre $[SO']$. Se tiene

$$6 = [\triangle ABC] = [\triangle O'BC] + [\triangle O'AC] + [\triangle O'AB].$$

Porque el círculo de centro O' es tangente a los lados $[BC]$ y $[AC]$, se tiene

$$[\triangle O'AC] = \frac{5}{2}R, \qquad [\triangle O'BC] = 2R.$$

Se hallará ahora $[\triangle O'AB] = \dfrac{1}{2}(AB)(SO')$. Obsérvese que $\triangle ABC \sim \triangle OTO'$. Ahora bien,

$$\frac{O'T}{BC} = \frac{OO'}{AC} \implies \frac{O'T}{4} = \frac{2R}{5} \implies O'T = \frac{8R}{5}.$$

Así,

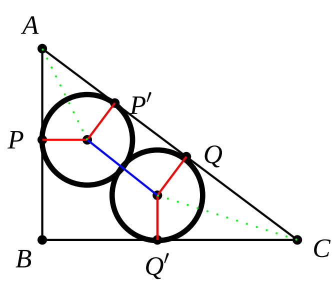
$$SO' = ST + TO' = R + \frac{8R}{5} = \frac{13R}{5}$$

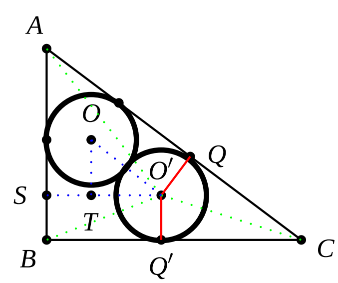
y

$$[\triangle O'AB] = \frac{1}{2}(AB)(SO') = \frac{3}{2}\cdot\frac{13R}{5} = \frac{39R}{10}.$$

Finalmente,

$$6 = \frac{39R}{10} + \frac{5R}{2} + 2R \implies R = \frac{5}{7}.$$



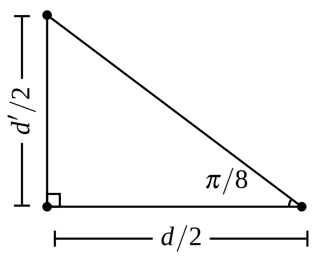


763 Si A es este ángulo, hallando el área de dos maneras distintas,

$$s^2 \operatorname{sen} A = \frac{dd'}{2} \implies \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \implies A = \frac{\pi}{6}.$$

764 Cada ángulo interno de un octágono regular mide $\dfrac{(8-2)\pi^\circ}{8} = \dfrac{3\pi}{8}$. Observe que cuatro de los vértices del octágono provienen directamente de los rombos. Así, dos de los ángulos del rombo serán $\dfrac{3\pi}{8}$ y los otros dos serán $\dfrac{\pi}{4}$. Sean $d > d'$ las diagonales de los rombos. Como las diagonales de un rombo se bisecan en ángulos rectos y como bisecan los ángulos en los vértices, se obtiene de la figura adjunta que

$$\frac{d}{d'} = \cot\frac{\pi}{8} = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1.$$



767 $\tan p - \tan q = \dfrac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$.

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{\tan((n+1)\theta) - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} & \text{si } \operatorname{sen}\theta \neq 0 \\ n & \text{si } \theta \equiv 0 \mod 2\pi \\ -n & \text{si } \theta \equiv \pi \mod 2\pi. \end{cases}$$

771 $\dfrac{7}{20}\sqrt{21}$

779 Poner $\theta = \dfrac{\pi}{7}$. Entonces $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}3\theta} = \dfrac{2\cos 2\theta}{\operatorname{sen}3\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}2\theta}$.

794 Osama deberá viajar sobre dos segmentos de recta: primero desde $(-1,1)$ hasta el origen $(0,0)$, y luego desde $(0,0)$ hasta $(2,1)$, evitando a toda costa el segundo cuadrante. Esto es porque si $a>0, b>0$ entonces la recta que une a $(-b,0)$ y $(a,0)$ yace en el segundo cuadrante y mide $\sqrt{a^2+b^2}$ unidades. La cucaracha pasa aquí unos $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ minutos. Pero en el camino sobre los ejes desde $(-b,0)$ hasta $(a,0)$ es $a+b$ unidades de largo y la cucaracha sólo invierte unos $a+b$ minutos aquí. Así pues, en tanto

$$a+b \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

la cucaracha deberá evitar el segundo cuadrante a toda costa. Pero por la desigualdad de la media

$$2ab \leq a^2+b^2 \implies (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \implies a+b \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

lo que significa que en tanto la velocidad de la cucaracha en el segundo cuadrante sea $< \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ será mejor evitarlo. Ya que $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, se sigue lo anunciado.

795 Es suficiente demostrar la desigualdad en el caso de que todos a,b,c,d sean positivos. Para esto, póngase $O=(0,0)$, $L=(a,b)$ y $M=(a+c,b+d)$. Por la desigualdad del triángulo $OM \leq OL+LM$, en donde ocurre igualdad si y sólo si los puntos son colineales. Pero entonces,

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = OM \leq OL+LM = \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2},$$

y la igualdad ocurre si y sólo si los puntos son colineales, esto es, si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

797 Úsese la generalización del teorema de Minkowski y el hecho que $17^2+144^2=145^2$. El valor buscado es S_{12}.

798 Se tiene

❶ Si L_t pasa por $(-2,3)$ entonces
$$(t-2)(-2)+(t+3)(3)+10t-5=0,$$
de donde $t=-\frac{8}{11}$. En este caso la recta es
$$-\frac{30}{11}x+\frac{25}{11}y-\frac{135}{11}=0.$$

❷ L_t será paralela al eje de x si el coeficiente de x desaparece, lo que ocurrirá cuando $t-2=0$, o sea, $t=2$. En este caso la recta es
$$y=-3.$$

❸ L_t será paralela al eje de y si el coeficiente de y es cero, lo cual necesita $t+3=0$, o sea, $t=-3$. En este caso la recta es
$$x=-7.$$

❹ La recta de ecuación $x-2y-6=0$ tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y L_t tiene pendiente $\frac{2-t}{t+3}$. Las rectas serán paralelas cuando $\frac{2-t}{t+3}=\frac{1}{2}$ or $t=1/3$. En este caso la ecuación de la recta es
$$-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}y-\frac{5}{3}=0.$$

❺ La recta $y=-\frac{1}{4}x-5$ tiene pendiente $-\frac{1}{4}$ y L_t tiene pendiente $\frac{2-t}{t+3}$. Las rectas serán perpendiculares cuando $\frac{2-t}{t+3}=4$ or $t=-2$. En este caso la recta pedida es
$$-4x+y-25=0.$$

❻ Si tal punto existiese, entonces pasaría por las rectas verticales y horizontales de la familia de L_t arriba obtenidas. Por lo tanto $(x_0,y_0)=(-7,-3)$ es un candidato para tal punto. Como
$$(t-2)(-7)+(t+3)(-3)+10t-5=-7t+14-3t-9+10t-5=0$$
el punto $(-7,-3)$ pasa por todas las rectas L_t no importa cual valor de t.

820 Se tiene, por definición de N', $\overrightarrow{AN'}=\overrightarrow{N'B}$, y por construcción, $\overrightarrow{MN'}=\overrightarrow{N'N}$. Así,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MN'}+\overrightarrow{N'N}\\ &= \overrightarrow{MN'}+\overrightarrow{MN'}\\ &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN'}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN'}\\ &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\end{aligned}$$
Igualmente,
$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC},\quad \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD},\quad \overrightarrow{MR}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}.$$
Como
$$\overrightarrow{NR}=\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN},\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP},$$
se deduce,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{NR}-\overrightarrow{PQ} &= (\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN})-(\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP})\\ &= (\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})-(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})\\ &= \overrightarrow{0}.\end{aligned}$$
De manera semejante se establece que $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{RQ}$. Luego, $NPQR$ es un paralelogramo.

826 Como las rectas $\overleftrightarrow{A_iA_j}$, $i \neq j$ son $\binom{n}{2}$ en número, existe una recta en el plano, llamémosla D que no es paralela a ninguna de ellas. De igual manera, existe una recta en el plano, llamémosla D' que no es paralela a D. Desplazando D paralelamente a si misma en la dirección de D' se pasan los puntos A_i uno a uno. Es suficiente detenerse cuando se hallan pasado p puntos.

842 Por ser baricentros de sus respectivas rectas, existen reales a, b, c con

$$L = aB + (1-a)C, \qquad M = bC + (1-b)A, \qquad N = cA + (1-c)B.$$

Se procede ahora de manera formal. Se tiene

$$\begin{matrix} L \\ \\ M \\ \\ N \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ \\ 1-b & 0 & b \\ \\ c & 1-c & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} A \\ \\ B \\ \\ C \end{matrix} .$$

Para este sistema tener solución no trivial es necesario y suficiente que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ \\ 1-b & 0 & b \\ \\ c & 1-c & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff abc + (1-a)(1-b)(1-c) = 0,$$

Como

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{1-a}{a}, \qquad \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{1-b}{b}, \qquad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{1-c}{c},$$

de donde se obtiene el resultado.

845 Se tiene por la ley de los senos,

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{AB \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{BAL}}}{CA \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{LAC}}} = \pm \frac{AB \operatorname{sen} C}{CA \operatorname{sen} \widehat{ABC}} = \pm \frac{(AB)^2}{(CA)^2}.$$

Como la división del segmento $[BC]$ es externa, se debe tomar el signo negativo. De igual manera

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = -\frac{(BC)^2}{(AB)^2}, \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{NB}} = -\frac{(CA)^2}{(BC)^2}.$$

El resultado se deduce ahora en multiplicando estas razones y en utilizando el Teorema de Menelao.

846 Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ copolares en O. Aplíquese el Teorema de Menelao al $\triangle OBC$ (con puntos menelaicos L, C', B'), $\triangle OCA$ (con puntos menelaicos M, A', C') y al $\triangle OAB$ (con puntos menelaicos N, B', A'). Entonces

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'B}} = -1, \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'O}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{C'C}} = -1, \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'A}} = -1 \implies \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = -1,$$

de donde L, M, N son colineales.

Recíprocamente, sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ coaxiales en L, M, N. Encuéntrense $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ en O. Ahora bien, $\triangle MCC'$ y $\triangle NBB'$ son copolares en L. Luego, por lo ya demostrado en la primera parte de este problema, dichos triángulos son coaxiales, esto es los puntos A, A', O son colineales. Se recoge que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son copolares en O.

847 Por ser baricentros de sus respectivas rectas, existen reales a, b, c con

$$\overrightarrow{0} = a\overrightarrow{A'B} + (1-a)\overrightarrow{A'C} = b\overrightarrow{B'C} + (1-b)\overrightarrow{B'A} = c\overrightarrow{C'A} + (1-c)\overrightarrow{C'B}.$$

Luego

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{1-a}{a}, \qquad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{1-b}{b}, \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{1-c}{c}$$

y
$$\overrightarrow{AA'} = a\overrightarrow{AB} + (1-a)\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CC'} = (1-c)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Obsérvese que de las igualdades arriba obtenidas se desprende que
$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = +1 \iff \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = +1.$$

Se distingue dos casos, dependiendo de si $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ o no.

Si $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ entonces $ab = a-1$ lo que implica que $b(c-1)+1=0$, que a su vez implica que $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{CC'}$.

Si $\overrightarrow{AA'}$ no es paralelo a $\overrightarrow{BB'}$, entonces $ab \neq a-1$. Un punto P tal que $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ yacerá sobre las tres rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ si y sólo si
$$(1-a)x - ay = 0, \qquad bx + y = b, \qquad -x - (1-c)y = c-1.$$
Este es un sistema de dos variables y tres ecuaciones, por lo que una de ellas es redundante. Ahora bien,
$$(1-a)x - ay = 0, \qquad bx + y = b \implies x = \frac{ab}{ab+1-a}, \quad y = \frac{b(1-a)}{ab+1-a}.$$
Estas soluciones deberán satisfacer la tercera ecuación y por lo tanto,
$$\begin{aligned} -\frac{ab}{ab+1-a} - \frac{b(1-a)(1-c)}{ab+1-a} = c-1 \quad &\iff \quad -ab - b(1-a)(1-c) = (c-1)(ab+1-a) \\ &\iff \quad ab - b + bc - 2abc - c + ca + 1 - a = 0 \\ &\iff \quad (1-a)(1-b)(1-a) - abc = 0 \\ &\iff \quad \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = +1, \end{aligned}$$
como se quería demostrar.

864 Sean $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OP}$ vectores, desde un origen O arbitrario hasta el muelle, el roble y el pino, respectivamente. Sea r una rotación de 90° hacia la derecha. Las condiciones del problema requieren vectores $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ que satisfagan
$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OR} + r(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OM}), \qquad \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OP} - r(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}).$$
Así pues
$$\frac{\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}}{2} = \frac{\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP}}{2} + \frac{r(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})}{2}$$
es independiente de la posición del muelle. Esto proporciona un algoritmo para encontrar el tesoro: tomad a P como el origen, luego el tesoro está en $\dfrac{\overrightarrow{PR} + r(\overrightarrow{PR})}{2}$.

881 Sea $\phi = ABB'$ y $\psi = \widehat{B'BC}$. Luego
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{CB \operatorname{sen} \psi}{AB \operatorname{sen} \phi} \quad \text{en el } \triangle ABC$$
y
$$\frac{CP}{PC'} = \frac{CB \operatorname{sen} \psi}{C'B \operatorname{sen} \phi} \quad \text{en el } \triangle C'BC.$$
De aquí
$$\frac{CB' \cdot AB}{B'A} = \frac{CP \cdot C'B}{PC'}$$
y así
$$\frac{CP}{PC'} = \frac{CB' \cdot AB}{B'A \cdot C'B}.$$

Como $AB = AC' + C'B$, en substituyendo se tiene

$$\begin{aligned}\frac{CB'\cdot AB}{B'A\cdot C'B} &= \frac{CB'(AC'+C'B)}{B'A\cdot C'B}\\ &= \frac{CB'\cdot AC'}{B'A\cdot C'B} + \frac{CB'\cdot C'B}{B'A\cdot C'B}\\ &= \frac{CB'\cdot AC'}{B'A\cdot C'B} + \frac{CB'}{B'A}\end{aligned}$$

Por el Teorema de Ceva,

$$\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C} = 1$$

luego

$$\frac{CB'\cdot AC'}{B'A\cdot C'B} = \frac{CA'}{A'B},$$

de donde se obtiene el resultado.