Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas

Francisco Javier García Capitán
pacoga@ctv.es

Priego de Córdoba, 9 de Noviembre de 2002

Índice general

Capítulo 1

Miscelánea de problemas

Los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas plantean cuestiones que normalmente no se ven en los temarios escolares. La siguiente relación consta de problemas sobre algunos de los temas más frecuentes. Hay algunos temas más y habría que poner más problemas de cada tema para tener una idea más global del tipo de problemas que podemos encontrarnos en Olimpiadas, pero entonces la lista se haría demasiado grande para empezar.

Número natural y entero. Divisibilidad.

1. Encontrar un número de 4 cifras de la forma $aabb$ que sea cuadrado perfecto.

2. Hallar los polígonos regulares cuyos ángulos miden un número entero de grados.

Ecuaciones diofánticas.

3. Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas) por 99 céntimos. Si una manzana cuesta 3 céntimos más que una naranja, y compró más manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada compró?

4. Un hombre cobra un cheque por d dólares y c centavos en un banco. El cajero, por error, le da c dólares y d centavos. El hombre no se da cuenta hasta que gasta 23 centavos y además observa que en ese momento tiene $2d$ dólares y $2c$ centavos. ¿Cuál era el valor del cheque?

Congruencias.

5. Demuestra que si n es un entero impar, entonces $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

6. Halla el resto de dividir 23^{84292} entre 7.

El método de inducción.

7. Demostrar, que para cualquier n,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

8. Demostrar que para todo n entero positivo, el número $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Probar además que, si n no es múltiplo de 3, entonces $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 24.

El principio del palomar.

9. Supongamos que tenemos 27 números impares menores que 100. Entonces hay al menos un par de ellos cuya suma es 102.

10. Si elegimos $n + 1$ números entre 1 y $2n$ es siempre posible encontrar dos de ellos tales que uno divide al otro.

Progresiones y sucesiones.

11. En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado; en el cuadrado, un círculo y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de los círculos y la de los cuadrados.

12. Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de 4 cifras iguales.

Combinatoria.

13. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?

14. ¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto? ¿Cuántas letras debería tener el alfabeto para que un millón de personas diferentes se pueda identificar con iniciales de dos o tres letras?

Introducción a la probabilidad.

15. Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad

    a) de que primero salga un 4 y luego no.

    b) de que se obtenga por lo menos un 2.

16. Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino correcto.

Trigonometría y triángulos.

17. Por el baricentro G de un triángulo se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leqslant \frac{1}{4}.$$

18. ¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo de lados 8, 15 y 17 cm?

Polinomios. Ecuaciones polinómicas.

19. Encontrar la suma de los coeficientes del polinomio que resulta de operar y reducir términos en la expresión: $(1-3x+3x^2)^{743} \cdot (1+3x-3x^2)^{744}$.

20. Demostrar que si un polinomio de cualquier grado con coeficientes enteros toma el valor 7 para cuatro valores enteros de x, entonces no puede tomar el valor 14 para ningún valor entero de x.

Construcciones con regla y compás.

21. Inscribir en un cuadrado dado un triángulo equilátero con un vértice común.

22. Construir un cuadrado cuyos lados o sus prolongaciones pasen por cuatro puntos dados sobre una recta.

La circunferencia.

23. Dada una circunferencia de radio R, considerar cuatro circunferencias iguales de radio r, tangentes interiormente a la dada y tangentes exteriores cada una de ellas con las otras. Expresar r en función de R, primero exactamente y luego con cuatro decimales del correspondiente coeficiente. Hallar las áreas de los recintos que determinan.

24. Calcular la longitud de la circunferencia inscrita, circunscrita y exinscrita a un triángulo de lado $a = 1$ m. Dígase también el área comprendida entre las circunferencias inscrita y circunscrita.

Números complejos.

25. ¿Qué lugar geométrico ha de describir el afijo del complejo z para que los afijos de z, iz, e i estén alineados?

26. Demostrar que los tres afijos de z_1, z_2 y z_3 forman un triángulo equilátero si y sólo si $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.

Ecuaciones funcionales.

27. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple las desigualdades $f(x) \leq x$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo x e y entonces $f(x) = x$.

28. Se asigna un entero no negativo $f(n)$ a cada entero positivo n cumpliendo las siguientes condiciones:

    a) $f(mn) = f(m) + f(n)$ para todos los enteros positivos m y n.

    b) $f(n) = 0$ siempre que la cifra de las unidades de n sea un '3'.

    c) $f(10) = 0$.

    Demostrar que $f(n) = 0$ para todo entero positivo n.

Desigualdades.

29. Si a,b,c son tres reales positivos cualesquiera, demostrar que se cumple:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant 8.$$

30. Sean x, y, z números positivos tales que $x+y+z=1$. Demostrar que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64.$$

Capítulo 2

Soluciones de los problemas

2.1. Número natural y entero. Divisibilidad.

En este tema los conceptos fundamentales son divisor y múltiplo, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, descomposición factorial de un número en factores primos, reglas de divisibilidad, etc.

Para resolver los problemas propuestos tendremos en cuenta que:

- Si p es un primo que divide a n y n es un cuadrado, entonces p^2 también divide a n.
- Hay una regla para saber si un número es divisible por 11: la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las cifras que ocupan lugar impar se diferencian en un múltiplo de 11.
- Dos números consecutivos $n-1$ y n siempre son primos relativos, pues un divisor común de ambos también lo será de $1 = n-(n-1)$.

Ahora veamos la solución de los problemas de esta sección:

1. *Encontrar un número de 4 cifras de la forma aabb que sea cuadrado perfecto.*

   Solución: Para que el número $N = aabb = a0b \cdot 11$ sea un cuadrado perfecto, el número $a0b$ debe ser múltiplo de 11, es decir $a+b$ debe ser un múltiplo de 11, que sólo puede ser 11. Entonces $a0b = 100a + 11 - a = 99a + 11 = 11(9a+1)$ y $9a+1$ debe ser un cuadrado. Examinando los valores del 2 al 9 sólo ocurre esto para $a = 7$, así que $N = 704 \cdot 11 = 7744 = 11^2 \cdot 8^2$.

2. *Hallar los polígonos regulares cuyos ángulos miden un número entero de grados.*

   Solución: Un polígono de n lados puede descomponerse en $n-2$ triángulos, por lo que la suma de sus ángulos es $(n-2)\cdot 180°$. Si el polígono es regular, la medida de cada ángulo del polígono es $\frac{(n-2)180°}{n}$. Si n es impar, n debe ser un divisor de 180. Si n es par, será de la forma $n = 2k$ y para que $\frac{(n-2)180°}{n} = \frac{(k-1)180°}{k}$ sea entero, k debe ser un divisor de 180. Por tanto, n es un divisor impar de 180 o el doble de un divisor cualquiera de 180. Los divisores de 180 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 y 180. Teniendo en cuenta que debe ser $n \geq 3$, los posibles n impares son 3, 5, 9, 15 y 45. Los posibles n pares son 4, 6, 8, 10, 12, 30, 36, 40, 60, 72, 90 y 180.

2.2. Ecuaciones diofánticas.

Llamamos ecuaciones diofánticas a aquellas en las que sólo intervienen números enteros. Diofanto de Alejandría las trató en su famosa *Aritmética*, y por ello llevan su nombre.

Para resolverlas, aparte de las operaciones algebraicas habituales (sustituir, despejar, reducir, etc.) tendremos en cuenta cuestiones de divisibilidad, que las incógnitas son números enteros, y en la mayoría de los casos, que son números positivos.

Por ejemplo, si en la resolución de una ecuación diofántica llegamos a que un número n de personas cumple que $n \leq 6{,}25$ y que $n \geq 5{,}87$, sólo puede ser $n = 6$. Esta consideración nos permite resolver el siguiente problema.

3. *Un hombre compró doce piezas de fruta (manzanas y naranjas) por 99 céntimos. Si una manzana cuesta 3 céntimos más que una naranja, y compró más manzanas que naranjas, ¿cuántas de cada compró?*

   Solución: Llamamos x, y al número de manzanas y naranjas, respectivamente, y p al precio de una naranja. Entonces

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (p+3)x + py = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + p(x+y) = 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x + 12p = 99 \\ x + 3p = 33 \\ x = 33 - 3p \end{array}.$$

Sustituyendo, $y = 12 - x = 12 - (33 - 4p) = 4p - 21$. Como compró más manzanas que naranjas, $33 - 4p > 4p - 21 \Rightarrow 54 > 8p \Rightarrow p \leq 6$. Por otro lado, x e y deben ser positivos, por lo que $4p - 21 \geq 0 \Rightarrow p \geq 6$. Sólo puede ser $p = 6$, que da $x = 9$ manzanas e $y = 3$ naranjas.

Antes de mostrar la solución del problema de los dólares y los centavos, veamos algo de teoría sobre el máximo común divisor y las ecuaciones diofánticas lineales.

El máximo común divisor (MCD) de dos números enteros a y b se representa por (a, b) y se define como el menor número positivo d tal que $d|a$ y $d|b$. (El símbolo $|$ se lee 'divide a').

Una forma de hallar el MCD de dos números es descomponer dichos números como potencias de primos y considerar el número resultante de tomar los menores exponentes que aparezcan en dichas descomposiciones. Por ejemplo, si $a = 60 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 24 = 2^3 \cdot 3$, el MCD es $(60, 24) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

A nosotros aquí nos interesa otro método, que es el algoritmo de Euclides. Aparte de obtener el MCD, luego nos dará más información. El algoritmo de Euclides consiste en, de forma sucesiva, dividir el número más grande entre el pequeño y ir sustituyendo el dividendo por el divisor y el divisor por el resto, hasta que la división sea exacta. Por ejemplo con los números $a = 45$ y $b = 24$, las cuentas serían

$$\begin{array}{r|l} 45 & 24 \\ \cline{2-2} 21 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 21 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array}$$

Vemos que 3, es decir el último divisor, o el último resto no nulo, es el MCD de 45 y 24. Además, si en las divisiones anteriores expresamos que el dividendo es el divisor por el cociente más el resto obtenemos:

$$45 = 1 \cdot 24 + 21$$
$$24 = 1 \cdot 21 + 3,$$

y, yendo hacia atrás,

$$\begin{aligned} 3 =& 24 - 1 \cdot 21 = \\ =& 24 - 1 \cdot (45 - 24) = \\ =& 45 \cdot (-1) + 24 \cdot 2. \end{aligned}$$

Lo que debemos aprender de aquí es que el máximo común divisor d de dos números a y b siempre podrá expresarse en la forma $ax + by = d$, y que el algoritmo de Euclides nos dice cómo hacerlo.

Vamos a aprovechar todo esto para resolver ecuaciones diofánticas lineales con dos incógnitas, es decir ecuaciones de la forma

$$ax + by = c,$$

donde los coeficientes y las incógnitas son enteros.

Dada una ecuación de este tipo, veremos en que casos hay solución en cuáles no. Además, en el primer caso, veremos de que forma son todas las (infinitas) soluciones de la ecuación.

En el caso concreto de que $c = d$, es decir que la ecuación sea $ax+by = d$, siendo $d = MCD(a, b)$, el algoritmo de Euclides nos dice que hay una solución y además nos dice cómo encontrarla. Por ejemplo, la ecuación $45x+24y = 3$ tiene la solución $x = -1$, $y = 2$ según hemos visto antes.

Si c es cualquier múltiplo de d, es decir, si $c = kd$ para un cierto entero k, bastará encontrar una solución x, y de la ecuación $ax+by = d$, y entonces kx, ky será una solución de $ax + by = c$. Por ejemplo, para resolver la ecuación $45x + 24y = -6$ obtenemos la solución $x = -1$, $y = 2$ de $45x + 24y = 3$ y entonces, $x = 2$, $y = -4$ es una solución de $45x + 24y = -6$.

Si c no es ningún múltiplo de d, entonces la ecuación no tiene ninguna solución. Por ejemplo, la ecuación $45x + 24y = 5$ no tiene ninguna solución, ya que el primer miembro es divisible por 3 y el segundo miembro no.

Los tres párrafos anteriores deben haber aclarado que la ecuación $ax + by = c$ tiene solución si y solo si c es un múltiplo de d. Nos interesa saber ahora de que forma son todas las soluciones de la ecuación.

Siempre podremos simplificar la ecuación de manera que el máximo común divisor de a y b siempre lo podremos considerar 1, es decir a y b serán primos relativos.

En nuestro caso, el de la ecuación $45x + 24y = 3$, la ecuación se simplificará a $15x + 8y = 1$. Sea x, y cualquier solución de esta ecuación. Como $15\cdot(-1)+8\cdot 2 = 1$, restando ambas igualdades obtenemos $15(x+1)+8(y-2) = 0$ o $15(x + 1) = -8(y - 2)$. Entonces 15, que es primo relativo con 8, debe dividir a $y - 2$, de donde $y = 2 + 15t$ para algún entero t. Sustituyendo,

$15(x+1) = -8(15t)$, es decir $x = -1 - 8t$. Por tanto, las infinitas soluciones de $15x + 8y = 1$ son de la forma

$$\begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 2 + 15t \end{cases}$$

para algún entero t.

¿Qué ocurre en general? Si tenemos una ecuación diofántica lineal con dos incógnitas, $ax + by = c$, siendo a y b primos relativos, y x_0, y_0 es una solución de dicha ecuación, todas las demás ecuaciones son de la forma

$$\begin{cases} x = x_0 - at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

para algún entero t. El razonamiento es el mismo que el hecho con el ejemplo anterior.

Apliquemos ya todo esto a resolver el problema de los centavos y los dólares.

4. *Un hombre cobra un cheque por* d *dólares y* c *centavos en un banco. El cajero, por error, le da* c *dólares y* d *centavos. El hombre no se da cuenta hasta que gasta 23 centavos y además observa que en ese momento tiene* $2d$ *dólares y* $2c$ *centavos. ¿Cuál era el valor del cheque?*

   Planteemos la ecuación $(100c + d) - 23 = 200d + 2c$ y obtendremos $98c - 199d = 23$. Usemos el algoritmo de Euclides para encontrar una solución de esta ecuación:

$$\begin{array}{ll} 199 = 2 \cdot 98 + 3 & 3 = (-2) \cdot 98 + 1 \cdot 199 \\ 98 = 32 \cdot 3 + 2 & 2 = 65 \cdot 98 + (-32) \cdot 199 \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 & 1 = (-67) \cdot 98 + 33 \cdot 199 \end{array}$$

   Entonces $c = -67$, $d = -33$ es una solución de $98c - 199d = 1$ y, multiplicando por 23, $c = -1541$, $d = -759$ es una solución de $98c - 199d = 23$. Las demás soluciones serán de la forma

$$\begin{cases} c = -1541 + 199t \\ d = -759 + 98t \end{cases}.$$

   Para $t \geq 8$ es cuando se obtienen valores positivos de c y d: Para $t = 8$, $c = 51$, $d = 25$. Para valores mayores de t, c sería mayor que 100, que es imposible. Por tanto, el valor del cheque era de 25 dólares y 51 centavos.

2.3. Congruencias.

La teoría de congruencias fue desarrollada por Gauss (1777-1855) en sus *Disquisitiones Aritmeticae*. Las congruencias aparecen cuando lo que nos interesa de un número a es su resto al dividirlo por otro m, llamado módulo. Diremos que dos números a y b son congruentes módulo m cuando $a - b$ es divisible por m y lo escribiremos así $a \equiv b \pmod{m}$. Por ejemplo, 17 es congruente con 2 módulo 5, pues $17-2$ es divisible por 5. Entonces escribimos $17 \equiv 2 \pmod{5}$. Otra forma de verlo es que al dividir 17 por 5 obtenemos resto 2.

Las propiedades que cumplen las congruencias nos permiten calcular con facilidad restos de operaciones complicadas. Como ejemplo de estas propiedades, si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ y $ac \equiv bd \pmod{m}$. Como consecuencia de esta última, tendremos también que $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para cualquier entero n.

El teorema de Fermat (debido a Pierre de Fermat, 1601-1665), proporciona algunas congruencias que pueden ser útiles. Dice que si p es un primo y a es cualquier entero tal que $p \nmid a$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Por ejemplo, para $p = 5$ y $a = 6$, $6^4 = 1296 \equiv 1 \pmod{5}$. En este caso, sin embargo, el mismo resultado es fácil de obtener directamente, ya que $6^4 \equiv 1 \pmod{5}$ y sólo tenemos que elevar a la cuarta para conseguir $6^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

Pasamos ya a resolver los problemas de esta sección:

5. *Demuestra que si n es un entero impar, entonces $n^2 \equiv 1$ (mód 8).*

   Solución: Para comprobar esta congruencia, veremos que $n^2 - 1$ es un múltiplo de 8. Si n es un entero impar, entonces $n = 2k - 1$ para algún entero k. Entonces, $n^2 = 4k^2 - 4k + 1$ y $n^2 - 1 = 4k(k - 1)$. Como $k(k - 1)$ siempre es par, ya que $k - 1$ y k son números consecutivos, y uno de ellos tiene que ser par, $n^2 - 1$ es múltiplo de 8.

6. *Halla el resto de dividir 23^{84292} entre 7.*

   Solución: Según el teorema de Fermat, $23^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Por tanto, como $84292 = 6 \cdot 14048 + 4$, tendremos que

   $$23^{84292} \equiv (23^6)^{14048} \cdot 23^4 \equiv 2^4 \equiv 2 \pmod{7}.$$

   De nuevo, aquí el teorema de Fermat es poco eficiente, ya que, directamente, $23^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ y teniendo en cuenta que $84292 =$

$3 \cdot 28097 + 1$ podriamos haber hecho

$$23^{84292} \equiv (23^3)^{28097} \cdot 23^1 \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{7}.$$

2.4. El método de inducción.

Supongamos que tenemos un enunciado que depende de un número natural n y queremos probar que es cierto para cualquier n. Como ejemplo tomemos el enunciado "$n(n+1)$ es par para cualquier n". En la solución del problema 5 hemos usado un método directo para demostrar este enunciado: al ser n y $n+1$ números enteros consecutivos uno de ellos debe ser par y el producto también lo es. Sin embargo, no siempre es fácil hacer una demostración de forma directa.

Veamos otra forma de demostrar este enunciado que, aunque aquí no sea la más adecuada sirve para ilustrar el método. Llamamos $a_n = n(n+1)$. En lugar de probar directamente que a_n es par, probaremos que: *a*) a_1 es par. *b*) Si a_n es par entonces, a_{n+1} es par. La conclusión será la misma y a este se le llama el *método de inducción*. El primer apartado es sencillo: $a_1 = 1 \cdot 2$ es par. El segundo apartado consiste en expresar $a_{n+1} = (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = (n^2 + n) + (2n + 2) = a_n + 2(n+1)$. Entonces vemos que si a_n es par, a_{n+1} es la suma de dos números pares y por tanto, tambien par.

7. *Demostrar, que para cualquier* n,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solución: Si $n = 1$, tenemos la igualdad $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$. Suponiendo que la igualdad es cierta para n,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 =& 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \\ =& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ =& (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + n + 1\right) = \\ =& (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \\ =& \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

cumpliéndose también la fórmula para $n+1$.

8. *Demostrar que para todo n entero positivo, el número $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Probar además que, si n no es múltiplo de 3, entonces $3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 24.*

   Para $n=1$, $A_1 = 5+2+1 = 8$ es un múltiplo de 8. Si suponemos que $A_n = 5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1 = 8k$, entonces

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 5^{n+1} + 2\cdot 3^n + 1 = \\ &= 5\cdot(8k - 2\cdot 3^{n-1} - 1) + 2\cdot 3^n + 1 = \\ &= 40k - 10\cdot 3^{n-1} - 5 + 6\cdot 3^{n-1} + 1 = \\ &= 40k - 4\cdot 3^{n-1} - 4 = 40k - 4(3^{n-1} - 1), \end{aligned}$$

   de donde, por ser 3^{n-1} impar, deducimos que A_{n+1} es múltiplo de 8.

   Si n no es múltiplo de 3, será de la forma $n = \pm 1 \pmod 3$, por lo que $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ y $2n^2+1$ es múltiplo de 3, siéndolo también A_n. Al ser A_n múltiplo de 3 y de 8, lo será de 24.

2.5. El principio del palomar.

El principio de palomar es algo muy fácil de entender: Si $n+1$ palomas se meten en n nidos de un palomar, al menos en un nido debe haberse metido más de una paloma. Esta idea nos puede servir para resolver problemas, en los que la tarea consistirá en identificar cuáles son las palomas y cuáles son los nidos.

9. *Supongamos que tenemos 27 números impares menores que 100. Entonces hay al menos un par de ellos cuya suma es 102.*

   Solución: Hay 50 números impares menores que 100, y 48 de ellos forman parejas cuya suma es 102: $(3,99),(5,87),\ldots,(49,53)$. Cada una de estas parejas será uno de nuestros nidos. Además consideramos otros dos nidos, formado cada uno de ellos por el los números que no tienen pareja: 1 y 51. En total hay 26 nidos. Como tenemos 27 números (las palomas), dos de ellos serán del mismo nido, y tiene que ser de uno de los 24 primeros, así que esos dos números sumarán 102.

10. *Si elegimos $n+1$ números entre 1 y $2n$ es siempre posible encontrar dos de ellos tales que uno divide al otro.*

    Solución: Cada uno de los $n+1$ números es de la forma $2^r s$, siendo s uno de los n números impares entre 1 y $2n-1$. Entonces tenemos $n+1$ palomas y n nidos. Por tanto, al menos dos de los números elegidos comparten el mismo s y uno de ellos tiene que dividir al otro.

2.6. Progresiones y sucesiones.

Si en la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$, la diferencia entre cada término y el anterior es una constante d, entonces, la sucesión se llama una progresión aritmética de diferencia d y cualquier término se puede calcular con la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$. Además, si llamamos S_n a la suma de los n primeros términos, tenemos que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n.$$

Si en la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$, el cociente entre cada término y el anterior es una constante r, entonces, la sucesión se llama una progresión gométrica de razón d y cualquier término se puede calcular con la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$. Además, si llamamos S_n a la suma de los n primeros términos, tenemos que

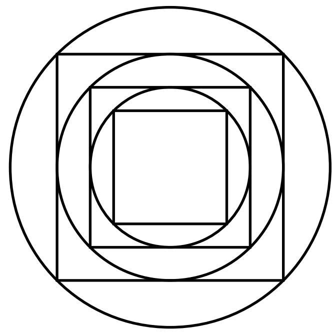
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}.$$

Cuando la razón de una progresión geométrica es $r < 1$, la expresión r^n se hace prácticamente 0 cuando n es muy grande y resulta que podemos calcular la suma S de todos los términos de la progresión:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots = \frac{a_1 \cdot 0 - a_1}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}.$$

11. *En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado; en el cuadrado, un círculo y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de los círculos y la de los cuadrados.*

    Solución: Consideramos la figura siguiente:



Llamando r al radio de la circunferencia inscrita en el primer cuadrado, del teorema de Pitágoras, obtenemos que $r^2+r^2=R^2$, es decir $r=\frac{R}{\sqrt{2}}$, por lo que la sucesión de los radios de las circunferencias es una progresión geométrica de razón $\frac{R}{\sqrt{2}}$. La sucesión de las áreas, formará una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y su suma será,

$$S=\frac{\pi R^2}{1-\frac{1}{2}}=2\pi R^2.$$

El lado del cuadrado que hay entre el círculo de radio R y el de radio r es $2r=\sqrt{2}R$. Las áreas de los cuadrados formarán también una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, por lo que su suma será

$$S=\frac{2R^2}{1-\frac{1}{2}}=4R^2.$$

12. *Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de 4 cifras iguales.*

    Solución: En este problema vamos a usar muy poco el concepto de progresión aritmética: sólo para establecer que los tres números son de la forma $n-2$, n y $n+2$. El resto del problema se resuelve usando conceptos de divisibilidad. La suma de los cuadrados de los tres números es $(n^2-4n+4)+n^2+(n^2+4n+4)=3n^2+8$ que, según el enunciado, también es de la forma $k\cdot 1111$ para alguna cifra k del 1 al 9. Entonces el número $k\cdot 1111-8$, y también $4k-8$ es divisible por 3. Recordando las ecuaciones diofánticas de primer grado, buscamos soluciones de $4k-8=3h$ o $4k-3h=8$, en la que vemos que $k=2, h=0$ es una solución. Otras posibilidades son $k=5, h=4$ y $k=8, h=8$. Teniendo en cuenta que $3n^2 + 8 = k \cdot 1111$, $\frac{k \cdot 1111 - 8}{3}$ aparte de ser entero, debe ser un cuadrado. Esto solo ocurre para $k = 5$ en el que obtenemos $n = 43$, y así los números buscados son 41, 43 y 45.

2.7. Combinatoria.

La Combinatoria es la parte de las Matemáticas que trata de las técnicas para contar y es muy usada en el Cálculo de Probabilidades.

El punto de partida es el *principio de multiplicación*, que nos dice que si una cosa puede hacerse de m formas distintas y otra puede hacerse de n formas distintas, entonces las dos cosas pueden hacerse de $m \times n$ formas distintas. Por ejemplo, si tengo 5 pantalones y 4 jerseys, tengo 20 formas posibles de combinar las dos prendas.

Para que el principio de multiplicación funcione, no debe haber ninguna relación entre las cosas. En el caso de las prendas, se supone que cualquier pantalón puede combinarse con cualquier jersey.

13. *¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?*

    Solución: Es más fácil responder a la segunda pregunta. El presidente podemos elegirlo primero de 20 formas distintas. Una vez elegido el presidente quedan 19 personas para elegir el vicepresidente y por último, quedan 18 personas para elegir al secretario. En total, hay $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ posibilidades. Esto es lo que se llaman *variaciones sin repetición* de 20 elementos tomados de 3 en 3 y se representa V_{20}^3. (Se llaman variaciones sin repetición porque se supone que una persona no puede ocupar dos cargos). Para responder a la primera pregunta, tengamos en cuenta que cada posibilidad PVS de presidente, vicepresidente y secretario elegida anteriormente, prescindiendo de los cargos, da lugar a seis posibilidades que la primera pregunta considera iguales: PVS,PSV,VPS,VSP,SPV y SVP. Por tanto resultan sólo $\frac{6840}{6} = 1140$ formas de elegir tres personas para un comité.

14. *¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto? ¿Cuántas letras debería tener el alfabeto para que un millón*

de personas diferentes se pueda identificar con iniciales de dos o tres letras?

Solución: Si partimos de que el alfabeto tiene 27 letras, con dos letras podemos hacer 27^2 iniciales y con 3 letras podemos hacer 27^3 iniciales. Así que con dos o tres iniciales podemos hacer $27^2 + 27^3 = 20,412$ iniciales. En un alfabeto con n letras tendremos $n^3 + n^2 = n^2(n+1)$ iniciales, número que sea mayor o igual que $1,000,000$. Para $n = 100$ se supera claramente esta cifra. Para $n = 99$ tenemos $99^2 \cdot 100 = (10,000 - 200 + 1)100 = 980,100$, así que debe ser $n \geq 100$.

2.8. Introducción a la probabilidad.

La probabilidad de que ocurra un suceso se calcula, cuando hay un número finito de casos, dividiendo el número de casos favorables a dicho suceso entre el total de casos posibles (regla de Laplace).

$$p = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos posibles}}$$

Aun cuando el número de casos posibles sea infinito, hay veces en las que puede adaptarse este método para hallar la probabilidad de un suceso.

15. *Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad*

    a) *de que primero salga un 4 y luego no.*

    b) *de que se obtenga por lo menos un 2.*

    Solución: De los $6 \times 6 = 36$ posibles pares x, y con $1 \leq x \leq 6$, $1 \leq y \leq 6$, hay 5 en los que $x = 4$ e $y \neq 4$. Por tanto, la probabilidad pedida en el apartado *a*) es $p = \frac{5}{36}$. De los mismos 36, hay 6 pares en los que $x = 2$, y seis pares en los que $y = 2$, habiendo contado dos veces el par $x = 2, y = 2$, por lo que hay 11 pares en los que hay algún 2, y la probabilidad pedida en el apartado *b*) es $p = \frac{11}{36}$.

16. *Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino correcto.*

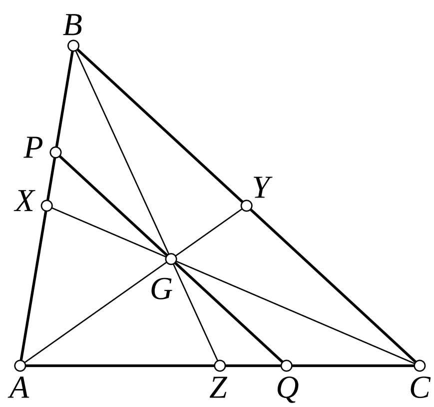
    Solución: Hay seis formas de hacer el reparto: 123, 132, 213, 231, 312, 321, donde por ejemplo, xyz indica que al primer destinatario se le ha entregado la carta del destinatario x, al segundo la del destinatario y y tercero la del destinatario z. El número de cartas que llegan al destinatario correcto es, respectivamente, $3, 1, 1, 0, 0, 1$. Vemos que en 4 de los seis casos posibles hay al menos una carta que llega a su destino correcto. Por tanto, $p = \frac{2}{3}$.

2.9. Trigonometría y triángulos.

17. *Por el baricentro G de un triángulo se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que*

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Solución: La figura es la siguiente:



Para resolver este problema usamos los vectores en el plano, que el baricentro G del triángulo ABC cumple $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ y la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica.

Escribiendo $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AQ} = s \cdot \overrightarrow{AC}$ tendremos que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} = \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1-s}{s}.$$

Como $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, obtenemos

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AP} = \left(\tfrac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AG} = -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \left(s - \tfrac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}.$$

Como estos vectores deben ser múltiplos debe cumplirse que

$$\left(\tfrac{1}{3}-t\right)\left(s-\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{9}=0 \Rightarrow (1-3t)(3s-1)+1=0 \Rightarrow t+s=3ts.$$

Entonces, usando esto y la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (ver página 27),

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA}=\frac{1-t}{t}\cdot\frac{1-s}{s}\leqslant\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-t}{t}+\frac{1-s}{s}\right)\right)^2=\frac{\frac{t+s-2ts}{2ts}}{4}=\frac{1}{4}.$$

18. *¿Cuál es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo de lados 8, 15 y 17 cm?*

    Solución: La superficie de un triángulo puede calcularse con la fórmula $A=sr$, siendo s el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo. El área del triángulo es muy facil de calcular, pues al ser $8^2+15^2=17^2$, el triángulo es rectángulo y su área es $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15=60$ cm^2. El semiperímetro es 20 cm. Por tanto, la circunferencia inscrita tiene un radio de 3 cm. Si el triángulo no hubiera sido rectángulo o no hubiéramos tenido ello en cuenta, podíamos haber usado la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{20\cdot 12\cdot 5\cdot 3}=60 \text{ cm}^2.$$

2.10. Polinomios. Ecuaciones polinómicas.

Se llama valor numérico de un polinomio al resultado de sustituir la x por un valor concreto a. En particular, cuando sustituimos por 1, la operación resultante es la suma de los coeficientes del polinomio. Con esto resolvemos:

19. *Encontrar la suma de los coeficientes del polinomio que resulta de operar y reducir términos en la expresión*: $(1-3x+3x^2)^{743}\cdot(1+3x-3x^2)^{744}$.

    Solución: Si $P(x)=(1-3x+3x^2)^{743}\cdot(1+3x-3x^2)^{744}$, la suma de los coeficientes del polinomio resultante será $P(1)=1^{743}\cdot 1^{744}=1$.

20. *Demostrar que si un polinomio de cualquier grado con coeficientes enteros toma el valor 7 para cuatro valores enteros de x, entonces no puede tomar el valor 14 para ningún valor entero de x.*

Solución: Sea $P(x)$ dicho polinomio y supongamos que existen números enteros distintos x_1, x_2, x_3, x_4 tales que $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = 7$. Entonces podrá expresarse

$$P(x) = 7 + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)Q(x).$$

Si suponemos que para algún entero y es $P(y) = 14$, tendríamos:

$$14 = 7 + (y - x_1)(y - x_2)(y - x_3)(y - x_4)Q(y),$$

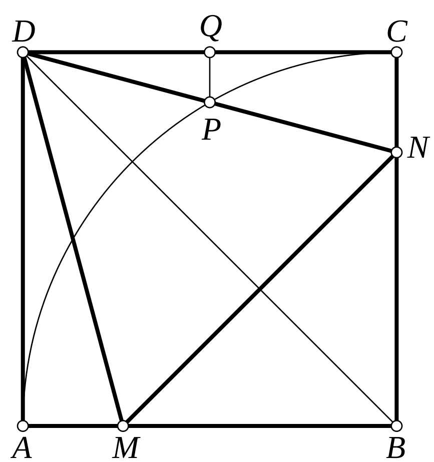
de donde fácilmente resulta que los números distintos $y - x_1$, $y - x_2$, $y - x_3$, $y - x_4$ son todos divisores de 7, lo cual es imposible ya que 7 tiene los divisores ± 1, ± 7 y el producto de todos ellos es 49, que daría lugar a la igualdad $7 = 49Q(y)$.

2.11. Construcciones con regla y compás.

Las construcciones con regla y compás son un espacio común al álgebra y a la geometría. Planteado, cierto problema de geometría, lo resolvemos mediante el álgebra y una vez encontrada la solución, expresamos ésta de forma geométrica. La proporcionalidad de segmentos y el teorema de Pitágoras son dos buenas herramientas a tener en cuenta.

21. *Inscribir en un cuadrado dado un triángulo equilátero con un vértice común.*

    Solución: Consideramos la figura, y nos fijamos en el trazado grueso, es decir, en la construcción ya realizada:



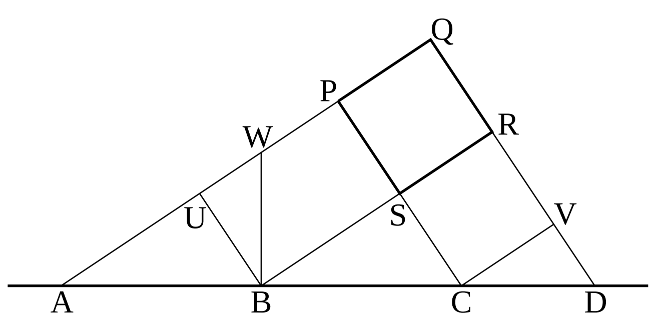
Sean a el lado del cuadrado y $AM = CN = x$. Entonces

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{(a-x)^2+(a-x)^2}\\&x^2-4ax+a^2=0\\&x=(2-\sqrt{3})a.\end{aligned}$$

Trazando un arco con centro en B y radio el lado del cuadrado, dicho arco corta en P a la mediatriz del segmento CD. El segmento QP mide el lado del cuadrado menos la altura del triángulo equilátero APB, es decir $QP = a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)a$. La semejanza de los triángulos DQP y DCN nos dice que $CN = \left(2-\sqrt{3}\right)a$ y quedaría construido el punto N. Para obtener el punto M, hallamos el punto simétrico M del punto N respecto de la diagonal BD del cuadrado.

22. *Construir un cuadrado cuyos lados o sus prolongaciones pasen por cuatro puntos dados sobre una recta. Solución*:

Solución: En la figura siguiente, sean A, B, C y D son los puntos dados y sea $PQRS$ el cuadrado buscado.



Por el punto B trazamos las perpendiculares BW a AB y BU a AP. Por C trazamos la perpendicular CV a DQ.

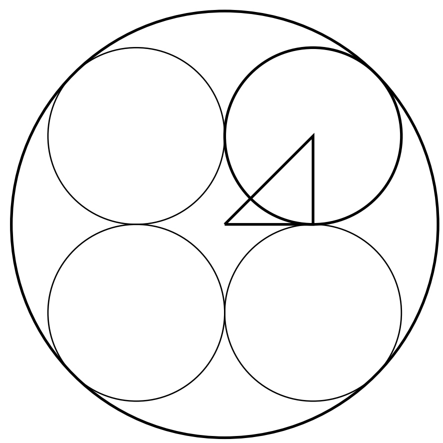
Consideramos los triángulos semejantes $\triangle UBW \sim \triangle UAB \sim \triangle VCD$. Se cumple que

$$\frac{BW}{UB} = \frac{AB}{UA} = \frac{CD}{VC}.$$

Como UB y VC son iguales, por ser lados de un cuadrado, también serán iguales BW y CD. Procediendo al revés, si levantamos W sobre B a una altura igual a CD resultará que la figura $PQRS$ es un cuadrado.

2.12. La circunferencia.

23. *Dada una circunferencia de radio R, considerar cuatro circunferencias iguales de radio r, tangentes interiormente a la dada y tangentes exteriores cada una de ellas con las otras. Expresar r en función de R, primero exactamente y luego con cuatro decimales del correspondiente coeficiente. Hallar las áreas de los recintos que determinan.*

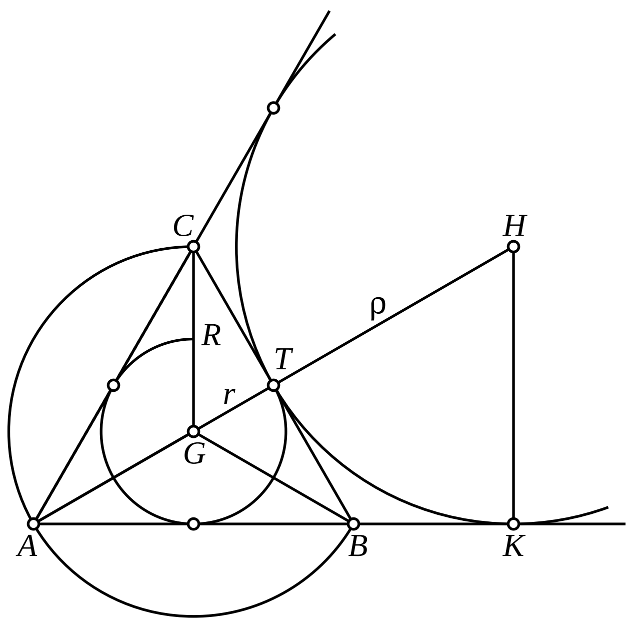


Observando la figura, vemos que se forma un triángulo rectángulo isósceles con lado r e hipotenusa $R - r$. Entonces, $(R - r)^2 = r^2 + r^2$. Entonces $R = r+\sqrt{2}r = (1+\sqrt{2})r$ y $r = (\sqrt{2}-1)R$. Teniendo en cuenta que $\sqrt{2} = 1{,}414213...$, podemos expresar $r = 0{,}4142R$ con cuatro decimales exactos. El recinto central tiene un área igual a un cuadrado de lado $2r$ menos un círculo de diámetro r: $4r^2 - \pi r^2$. El área de cada una de las circunferencias interiores es πr^2 y el área de cada uno de los triángulos curvilíneos es

$$\frac{\pi R^2 - 4\pi r^2 - (4r^2 - \pi r^2)}{4} = \frac{\pi(3 + 2\sqrt{2}) - 4\pi - 4 + \pi}{4} r^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{2}\pi - 2}{2} r^2.$$

24. *Calcular la longitud de la circunferencia inscrita, circunscrita y exinscrita a un triángulo equilátero de lado $a = 1$ m. Dígase también el área comprendida entre las circunferencias inscrita y circunscrita.*

Solución: Podemos considerar la siguiente figura, en la que R, r y ρ son los radios de las circunferencias circunscrita, inscrita y exinscrita al triángulo equilátero ABC.



Depende de lo consideremos sabido y podamos utilizar, la solución de este problema puede variar en longitud. Si sabemos que el baricentro dista de un vértice el doble que del lado opuesto, que es cierto en cualquier triángulo, entonces de $R = 2r$ y $R+r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta fácilmente que $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Usando, por ejemplo, la semejanza de los triángulos GTC y HKA, obtenemos que

$$\frac{R}{r} = \frac{R+r+\rho}{\rho} \Rightarrow (R-r)\rho = r(R+r) \Rightarrow \rho = \frac{r(R+r)}{R-r} = R+r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Concluimos, entonces, que las longitudes de las circunferencias circunscrita, inscrita y exinscrita son, respectivamente,

$$2\pi R = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, \quad 2\pi r = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, \quad 2\pi\rho = \pi\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Si no queremos usar la propiedad mencionada del baricentro, también podemos obtener el mismo resultado teniendo en cuenta, por ejemplo, el triángulo rectángulo CGT, del que obtenemos la relación $R^2 - r^2 = \frac{1}{4}$. Otra alternativa sería usar la trigonometría y tener en cuenta la multitud de ángulos de 30° y 60° que aparecen en la figura.

El área pedida en la segunda parte del problema, es

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \pi(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{12}) = \tfrac{\pi}{4}\ \mathrm{cm}^2.$$

2.13. Números complejos.

25. *¿Qué lugar geométrico ha de describir el afijo del complejo z para que los afijos de z, iz, e i estén alineados?*

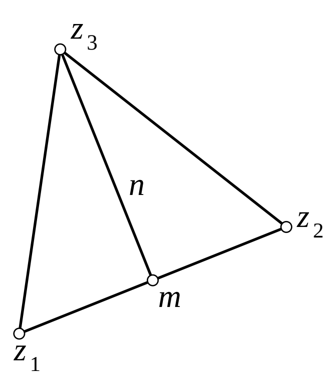
    Solución: Si $z = x + yi$, entonces $iz = -y + xi$. Para que z, iz, e i estén alineados, el área del triángulo que determinan debe ser cero:

    $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -y & 0 \\ y & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0,$$

    por lo que (x, y) estará en la circunferencia de radio $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$.

26. *Demostrar que los tres afijos de z_1, z_2 y z_3 forman un triángulo equilátero si y sólo si $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$.*

    Solución: Supongamos primero que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.



Entonces z_3 es uno de los complejos obtenidos complejo $m = \frac{z_1+z_2}{2}$, punto medio de z_1 y z_2, un complejo n perpendicular a $z_1 - z_2$ y con módulo $\frac{\sqrt{3}}{2}|z_1 - z_2|$, es decir,

$$\begin{aligned}
&z_3 = m + n = \frac{z_1+z_2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (z_1 - z_2)i \\
&(2z_3 - z_1 - z_2)^2 = -3(z_1 - z_2)^2 \\
&4z_3^2 + z_1^2 + z_2^2 - 4z_1z_3 - 4z_2z_4 + 2z_1z_2 = -3z_1^2 - 3z_2^2 + 6z_1z_2 \\
&4z_1^2 + 4z_2^2 + 4z_3^2 = 4z_1z_2 + 4z_2z_3 + 4z_3z_1 \\
&z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si z_1, z_2, z_3 son números complejos que satisfacen $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, resolviendo como ecuación en z_3 obtenemos

$$\begin{aligned}
&z_3^2 - (z_1+z_2)z_3 + z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2 = 0 \\
&z_3 = \frac{z_1 + z_2 \pm \sqrt{(z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2) - 4(z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2)}}{2} \\
&z_3 = \frac{z_1 + z_2 \pm \sqrt{-3(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2)}}{2} \\
&z_3 = \frac{z_1+z_2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (z_1 - z_2)i,
\end{aligned}$$

es decir, z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.

2.14. Ecuaciones funcionales.

27. *Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple las desigualdades $f(x) \leq x$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo x e y entonces $f(x) = x$.*

    Solución: Por hipótesis, $f(0) \leq 0$ y $f(0) \leq f(0)+f(0)$, es decir $f(0) \leq 0$ y $f(0) \geq 0$, por lo que $f(0) = 0$.

    Ahora, para cualquier x, $f(x) + f(-x) \geq f(0) = 0$, por lo que para cualquier x tendremos

    $$x \geq f(x) \geq -f(-x) \geq -(-x) = x,$$

    cumpliéndose obligatoriamente que $f(x) = x$.

28. *Se asigna un entero no negativo $f(n)$ a cada entero positivo n cumpliendo las siguientes condiciones*:

a) $f(mn) = f(m) + f(n)$ *para todos los enteros positivos* m *y* n.

b) $f(n) = 0$ *siempre que la cifra de las unidades de* n *sea un '3'.*

c) $f(10) = 0$.

Demostrar que $f(n) = 0$ *para todo entero positivo* n.

Solución: Teniendo en cuenta el apartado *a*) será suficiente probar que $f(p) = 0$ si p es primo. Como $f(2) + f(5) = f(10) = 0$, tenemos $f(2) = f(5) = 0$. Queda probar que $f(p) = 0$ si p es un primo que acaba en 1 o en 7, pues si p acaba en 3, $f(p) = 0$ por *b*). Pero si p acaba en 1, $3p$ acaba en 3, luego $f(3) + f(p) = f(3p) = 0$ y $f(p) = 0$. De forma parecida, si p acaba en 7, p^3 acaba en 3, así que $0 = f(p^3) = 3f(p)$, de donde $f(p) = 0$.

2.15. Desigualdades.

Las desigualdades permiten establecer que unas expresiones son mayores o menores que otras, así como el cálculo de máximos y mínimos sin recurrir a las derivadas.

Muchas de las desigualdades que aparecen en los problemas de Olimpiadas tienen que ver con las diferentes medias que pueden definirse.

Suponiendo que x e y son números positivos, se definen, entre otras, la media aritmética H, la media geométrica G y la media aritmética A de los números x e y, mediante las fórmulas

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}.$$

Estas medias se definen de forma parecida para tres números no negativos x, y y z:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}, \quad G = \sqrt[3]{xyz}, \quad A = \frac{x+y+z}{3}.$$

y para un número arbitrario n de números no negativos $x_1, \ldots, x_n$:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \quad A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Puede comprobarse fácilmente que estas medias no dan el mismo resultado en general. Puede demostrarse además que siempre se cumple que $H \leq G \leq A$

y además la igualdad se produce solamente cuando todos los números son iguales.

29. *Si a,b,c son tres reales positivos cualesquiera, demostrar que se cumple*:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant 8.$$

Solución: Usamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, en la forma $x+y\geq 2\sqrt{xy}$.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}&=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\\ &=2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}}2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}}2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{b}}=8.\end{aligned}$$

30. *Sean x, y, z números positivos tales que $x+y+z=1$. Demostrar que*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 64.$$

Solución: Un intento puede consistir en usar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica como en el problema anterior.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}}2\sqrt{\frac{1}{y}}2\sqrt{\frac{1}{z}}=\frac{8}{\sqrt{xyz}}.$$

Ahora usamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica aplicada a tres números:

$$\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}\Rightarrow xyz\leqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\leqslant\frac{1}{27}\Rightarrow\frac{8}{\sqrt{xyz}}\geqslant 24\sqrt{3}.$$

Obtenemos una acotación que no es suficiente, puesto que $24\sqrt{3}<64$. Debemos intentarlo de otro modo. Usamos las desigualdades entre la media armónica, la media geométrica y la media aritmética:

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leqslant\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}.$$

Desarrollando, aplicando las desigualdades, y teniendo en cuenta que $x + y + z = 1$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \\
=&\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} = \\
=&\frac{1+(x+y+z)+(xy+xz+yz)+xyz}{xyz} = \\
=&\frac{2}{xyz}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+1 \geqslant \\
\geqslant&2\left(\frac{3}{x+y+z}\right)^3+\frac{9}{x+y+z}+1 = \\
=&2\cdot 27+9+1 = \\
=&64.
\end{aligned}
$$

$$P = \left(\frac{am^2 + c}{m^2 + 1}, \frac{(c-a)m}{m^2+1} \right)$$
$$Q = \left(\frac{am^2 + d}{m^2 + 1}, \frac{(d-a)m}{m^2+1} \right)$$
$$R = \left(\frac{bm^2 + d}{m^2 + 1}, \frac{(d-b)m}{m^2+1} \right)$$
$$S = \left(\frac{bm^2 + c}{m^2 + 1}, \frac{(c-b)m}{m^2+1} \right)$$
$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{d-c}{m^2+1}, \frac{(d-c)m}{m^2+1} \right) = \frac{d-c}{m^2+1}\,(1, m)$$
$$\overrightarrow{PS} = \left(\frac{(b-a)m^2}{m^2+1}, \frac{-(b-a)m}{m^2+1} \right) = \frac{(b-a)m}{m^2+1}(m, -1)$$
$$d - c = (b-a)m \Rightarrow m = \frac{d-c}{b-a}.$$