Desigualdad de Bernoulli

§ 4 Desigualdades
Korovkin

En este parágrafo demostraremos, apoyándonos en el teorema 2[1], la desigualdad de Bernoulli, que tiene interés por sí sola y se aplica frecuentemente en la solución de problemas.

Teorema 3 *Si* $x \geq -1$ *y* $0 < \alpha < 1$ *, entonces*

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x \tag{11}$$

En cambio, si $\alpha < 0$ *o bien si* $\alpha > 1$ *, se tiene*

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x \tag{12}$$

El signo de igualdad en (11) *y* (12) *se cumple sólo para* $x = 0$.

Demostración: Supongamos que α es un número racional con la particularidad de que $0 < \alpha < 1$. Sea $\alpha = \frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros positivos y $1 \leq m < n$. Debido a que $1 + x > 0$ por hipótesis, tenemos

$$(1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m .1^{n-m}} =$$

$$\sqrt[n]{\underbrace{(1+x).(1+x)\ldots(1+x)}_{m}.\underbrace{1.1\ldots1}_{n-m}} \leq$$

$$\frac{(1+x)+(1+x)+\ldots+(1+x)+(1+1+\ldots+1)}{n} =$$

$$\frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1+\frac{m}{n}x = 1+\alpha x$$

El signo de igualdad tiene lugar sólo si todos los factores que figuran debajo del radical son iguales, o sea si $1 + x = 1$, $x = 0$.
En cambio, si $x \neq 0$, tenemos

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x .$$

Es decir, hemos demostrado la primera parte del teorema para el caso en que α es un número racional.

Supongamos ahora que $0 < \alpha < 1$, Sea $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ una sucesión de números racionales que tiene α como límite con la particularidad de que $0 < r_n < 1$. De las desigualdades

$$(1+x)^{r_n} \leq 1+r_n x, \quad x \geq -1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

demostradas ya para el caso en que el exponente es un número racional, se deduce que

[1] Ver § 2 : Media aritmética y media geométrica.

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \le \lim_{r_n \to \alpha} (1+r_n x) = 1+\alpha x$$

Con esto la desigualdad (11) queda demostrada también para los valores irracionales de α.
Resta demostrar que para valores irracionales de α, siendo $0<\alpha<1$, y $x \neq 0$, se tiene

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x,$$

o sea, que el signo de igualdad no tiene lugar en (11) si $x \neq 0$. Con este fin tomemos un número racional r tal que $\alpha < r < 1$. Es evidente que

$$(1+x)^{\alpha} = \left((1+x)^{\frac{\alpha}{r}}\right)^{r}.$$

Puesto que $0<\dfrac{\alpha}{r}<1$, resulta, según hemos demostrado, que

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{r}} \le 1+\frac{\alpha}{r}x$$

Por consiguiente

$$(1+x)^{\alpha} \le \left(1+\frac{\alpha}{r}x\right)^{r}$$

Si $x \neq 0$, tenemos $\left(1+\dfrac{\alpha}{r}x\right)^{r} < 1+r\dfrac{\alpha}{r}x = 1+\alpha x$, o sea,

$$(1+x)^{\alpha} < 1+\alpha x$$

Con esto queda completada la demostración de la primera parte del teorema.
Pasamos a la demostración de la segunda parte del teorema.

Si $1+\alpha x<0$, la desigualdad (12) es evidente, pues su primer miembro es no negativo, mientras que el segundo es negativo.

Si $1+\alpha x \ge 0$, o sea, $\alpha x \ge -1$, consideraremos por separado cada uno de los casos.
Sea $\alpha>1$; entonces según la primera parte del teorema, ya demostrada, tenemos

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \le 1+\frac{1}{\alpha}\alpha x = 1+x$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar sólo si $x=0$. Elevando a la potencia α ambos miembros de la desigualdad, obtenemos

$$(1+\alpha x) \le (1+x)^{\alpha}$$

Sea ahora $\alpha<0$. Si $1+\alpha x<0$, la desigualdad (12) se hace evidente. Si $1+\alpha x \ge 0$, tomemos un número entero positivo n de modo que se cumpla la desigualdad

$$-\frac{\alpha}{n} < 1.$$

En virtud de la primera parte del teorema, tenemos

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1-\frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geq \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}x} \geq 1+\frac{\alpha}{n}x$$

(la última desigualdad es válida porque $1 \geq 1-\frac{\alpha^2}{n^2}x^2$)

Elevando a la n-ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$(1+x)^{\alpha} \geq \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n} \geq 1+n\frac{\alpha}{n}x = 1+\alpha x$$

.

Notemos que la igualdad puede darse sólo en el caso $x=0$. Con esto queda demostrado completamente el teorema.

Problema 1. Demostrar que para $-1<\alpha<0$ se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{13}$$

Solución
Puesto que $0<\alpha+1<1$, tenemos en virtud de la desigualdad (11)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}$$

Multiplicando estas desigualdades por $n^{\alpha+1}$, obtenemos

$$(n+1)^{\alpha+1} < 1+\frac{\alpha+1}{n}$$

$$(n-1)^{\alpha+1} < 1-\frac{\alpha+1}{n}$$

de donde es fácil deducir las desigualdades (13).

Problema 2. Demostrar que para $-1<\alpha<0$, se tiene

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}-m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^{\alpha}+(m+1)^{\alpha}+\ldots+n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}-(m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{14}$$

Solución
Tomando en las desigualdades (13) $n = m,\ m+1,\ .\ .\ .\ ,\ n$, obtenemos

$$\frac{(m+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1} < m^{\alpha} < \frac{m^{\alpha+1} - (m-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\frac{(m+2)^{\alpha+1} - (m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < (m+1)^{\alpha} < \frac{(m+1)^{\alpha+1} - m^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$\frac{(m+3)^{\alpha+1} - (m+2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < (m+2)^{\alpha} < \frac{(m+2)^{\alpha+1} - (m+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1} - \left(n-1\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Sumando estas desigualdades, obtenemos (14)

Problema 3. Hallar la parte entera del número

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{1\ 000\ 000}}$$

Solución
Tomando en (14) $m = 4,\ n = 1\ 000\ 000$ y $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, obtenemos

$$\frac{1\ 000\ 001^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} < x < \frac{1\ 000\ 000^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

o sea,

$$\frac{3}{2}\,1\ 000\ 001^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\,4^{\frac{2}{3}} < x < \frac{3}{2}\,1\ 000\ 000^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\,3^{\frac{2}{3}} .$$

Puesto que

$$\frac{3}{2}1\ 000\ 001^{\frac{2}{3}} > \frac{3}{2}1\ 000\ 000^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}10\ 000 = 15\ 000,$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54} < 4, \quad \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} > \frac{3}{2}\sqrt[3]{8} = 3,$$

tenemos

$15\ 000 - 4 < x < 15\ 000 - 3$, o sea $14\ 996 < x < 14\ 997$.
De estas desigualdades resulta que $[x] = 14\ 996$.