Media aritmética, media geométrica y otras medias
Desigualdades
Korovkin

Media geométrica y media aritmética

Si x_1, x_2, ... ,x_n son números positivos, los números

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

formados a base de ellos, se denominan, respectivamente, *media aritmética* y *media geométrica* de los números x_1, x_2, ... ,x_n. Para estos dos números Augustin Cauchy, matemático francés, demostró a principios del siglo XIX la desigualdad

$$g \le a$$

que se aplica frecuentemente en la solución de problemas. Demostraremos esta desigualdad exponiendo previamente una proposición auxiliar.

Teorema 1. *Si el producto de unos números positivos* x_1, x_2, ... ,x_n *es igual a* 1 *, la suma de los mismos no es menor que* n *:*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge n$$

Demostración. Emplearemos el método de inducción matemática[1]. Comprobaremos primero que el teorema es válido para $n = 2$, o sea, demostraremos que

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 \ge 2$$

Con este fin, consideraremos por separado dos casos:

1) $x_1 = x_2 = 1$.

En este caso tenemos $x_1 + x_2 = 2$ y el teorema queda demostrado.

2) $0 < x_1 < x_2$

En este caso tenemos $x_1 < 1$ y $x_2 > 1$, puesto que el producto es igual a 1. De la igualdad

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) = x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1$$

se deduce que

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 + 1 + (1 - x_1)(x_2 - 1) \qquad (4)$$

La igualdad (4) ha sido establecida sin imponer condición alguna a los números x_1 y x_2. Teniendo en cuenta ahora que $x_1 x_2 = 1$, obtenemos

$$x_1 + x_2 = 2 + (1 - x_1)(x_2 - 1)$$

[1] Una exposición detallada del método de inducción matemática puede verse en el libro de *I. S. Sominski "Método de la inducción Matemática" (Editorial MIR, 1975)*

Finalmente, puesto que $x_1 < 1 < x_2$, el último número resulta positivo y por eso $x_1 + x_2 > 2$.
O sea, el teorema queda demostrado para $n = 2$. Notemos que la igualdad

$$x_1 + x_2 = 2$$

se cumple sólo si $x_1 = x_2$. En cambio, para $x_1 \neq x_2$, se tiene

$$x_1 + x_2 > 2$$

Basándonos en el método de inducción matemática, supondremos ahora que el teorema es válido para $n = k$, es decir, supondremos que la desigualdad

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$$

tiene lugar si $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1$, y demostraremos el teorema para $n = k + 1$, o sea, demostraremos que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

si $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$, donde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0, \ldots,$ $x_k > 0$, $x_{k+1} > 0$

Notemos ante todo que siendo

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1,$$

se pueden presentar dos casos:

1) todos los factores $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ son iguales, o sea:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1}$$

2) no todos los factores son iguales.

En el primer caso todos los factores son iguales a la unidad y la suma de los mismos es igual a $k + 1$, o sea,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1.$$

En el segundo caso, entre todos los factores del producto $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}$, habrá números mayores y menores que uno (si todos los factores fueran menores que uno, el producto también sería menor que uno).
Sea, por ejemplo, $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$. Tenemos

$$(x_1 x_{k+1}) \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 1$$

Poniendo $y = x_1 x_{k+1}$, obtenemos

$$y \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_k = 1$$

Puesto que aquí el producto de k números positivos es igual a la unidad, resulta (por hipótesis) que la suma de los mismos no es menor que k, o sea

$$y_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$$

Pero

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} =$$

$$(y_1 + x_2 + \ldots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 \geq$$

$$k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1,$$

Recordando que $y = x_1 x_{k+1}$, obtenemos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 =$$

$$(k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1)$$

Puesto que $x_1 < 1$ y $x_{k+1} > 1$., tenemos $(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$ y, por consiguiente,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1.$$

Con esto queda demostrado el teorema **1.**

Problema 1. Demostrar que si $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, se tiene

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

con la particularidad de que el signo de igualdad tiene lugar sólo si

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Solución. Puesto que

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$$

,
la desigualdad se deduce del teorema 1. El signo de igualdad tiene lugar sólo si

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_1} = 1$$

o sea, sólo si

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n.$$

Problema 2. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$$

Solución. Tenemos

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Puesto que el producto de los sumandos del último miembro es igual a la unidad, la suma de los mismos no es menor que dos. El signo de la igualdad tiene lugar sólo para $x = 0$.

Problema 3. Demostrar que para $a > 1$ se tiene

$$\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$$

Solución. Puesto que $\log_{10} a.\lg_a 10 = 1$, tenemos

$$\log_{10} a + \log_a 10 = \log_{10} a + \frac{1}{\log_{10} a} \geq 2 .$$

Problema 4. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$$

Solución. Dividamos entre x^2 numerador y denominador del primer miembro de la desigualdad:

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2}$$

Puesto que $\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$, tenemos $\frac{1}{x^2} + x^2 \geq 2$, y, por consiguiente,

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+x^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Pasemos ahora a demostrar la afirmación enunciada al principio del parágrafo.

Teorema 2. *La media geométrica de números positivos no pasa de la media aritmética de estos mismos números.*
Si los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no son todos iguales, la media geométrica de es tos números es menor que su media aritmética.

Demostración. De la igualdad $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ \ldots \cdot x_n}$ se deduce que $1 = \sqrt[n]{\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \ldots \frac{x_n}{g}}$,

o sea,

$$\frac{x_1}{g} \cdot \frac{x_2}{g} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{x_n}{g} = 1$$

.

Debido a que el producto de estos n números positivos es igual a 1, resulta (por el teorema 1) que la suma de los mismos no es menor que n, es decir,

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \ldots + \frac{x_n}{g} \geq n$$

Multiplicando por g y dividiendo entre n ambos miembros de la última desigualdad, obtenemos

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq g .$$

Notemos que la igualdad tiene lugar sólo cuando

$$\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \ \ldots \ = \frac{x_n}{g} = 1 ,$$

o sea,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$$

.

Por el contrario, si los números $x_1, \ x_2, \ldots, x_n$ no son todos iguales, se tiene

$$a > g$$

.

Problema 5. Entre todos los paralelepípedos con la suma fija de sus tres aristas recíprocamente perpendiculares, hallar el paralelepípedo de volumen máximo.
Solución. Sea $m = a + b + c$ la suma de las aristas y sea $V = abc$ el volumen del paralelepípedo. Puesto que

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3}$$

tenemos $V \leq \frac{m^3}{27}$. El signo de la igualdad tiene lugar sólo si $a = b = c = \frac{m}{3}$,
o sea, si el paralelepípedo es un cubo.

Problema 6. Demostrar la desigualdad

$$n! < \left(\frac{n+1}{2} \right)^n \quad n \geq 2 \qquad (5)$$

Solución. Empleando el teorema 2, tenemos

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

Elevando a la n–ésima potencia ambos miembros de la última desigualdad, obtendremos la desigualdad (5).

Media potencial

Definición. El número

$$c_\alpha = \left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se denomina *media potencial* de grado α de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$. En particular el número

$$c_2 = \left(\frac{a_1^{2} + a_2^{2} + \ldots + a_n^{2}}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

se denomina *media cuadrática,* y el número

$$c_{-1} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

se denomina *media armónica* de los números $a_1, a_2, \ \ldots, a_n$.

Problema 7. Demostrar que sí $a_1, a_2, \ \ldots, a_n$ son números positivos y si $\alpha < 0 < \beta$, se tiene

$$c_\alpha \le g \le c_\beta \tag{6}$$

o sea, que la media potencial de grado negativo no pasa de la media geométrica y que la media potencial de grado positivo no es menor que la media geométrica.

Solución. Debido a que la media geométrica de números positivos no pasa de la media aritmética, tenemos

$$g = \sqrt[n]{a_1^{\alpha} \cdot a_2^{\alpha} \ \ldots \ a_n^{\alpha}} \le \frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n}.$$

Elevando ambos miembros de la última desigualdad a la potencia $\dfrac{1}{\alpha}$ y tomando en consideración que $\dfrac{1}{\alpha} < 0$, obtenemos

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \, \ldots \, a_n} \leq \left(\frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + \ldots + a_n^{\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = c_{\alpha}$$

Con esto queda demostrada la primera de las desigualdades (6) ; la segunda se demuestra análogamente.
De la desigualdad (6) se deduce, en particular, que la media armónica c_{-1} no pasa de la media aritmética c_1.

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Problema 8. Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, se tiene

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Solución. Puesto que $c_{-1} \leq g \leq c_1$, tenemos

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = c_1 .$$

De esta desigualdad se deduce que

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Problema 9. Demostrar la desigualdad

$$n\, a_1 a_2 \, \ldots \, a_n \leq a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \tag{7}$$

donde

$$a_1 > 0, \ a_2 > 0, \ldots, \ a_n > 0 .$$

Solución. Puesto que la media geométrica no pasa de la media aritmética, tenemos

$$a_1 . a_2 \ldots a_n = \sqrt[n]{a_1^{\ n} \cdot a_2^{\ n} \ \ldots \ a_n^{\ n}} \ \leq \ \frac{a_1^{\ n} + a_2^{\ n} + \ldots + a_n^{\ n}}{n}$$

Multiplicando por *n* ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos la desigualdad (7).

De la desigualdad (7) se deduce que

$$2a_1 a_2 \leq a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}$$

$$3a_1 a_2 a_3 \leq a_1^{\ 3} + a_2^{\ 3} + a_3^{\ 3}$$

$$4a_1 a_2 a_3 a_4 \leq a_1^{\ 4} + a_2^{\ 4} + a_3^{\ 4} + a_4^{\ 4}$$

o sea, *el producto duplicado de dos números positivos no pasa de la suma de sus cuadrados, el producto triplicado de tres números no pasa de la suma de sus cubos,* etc.